

Titre: Conception et analyse d'un système d'optimisation de plans de vol
pour les avions

Auteur: Wissem Maazoun
Author:

Date: 2015

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Maazoun, W. (2015). Conception et analyse d'un système d'optimisation de plans
de vol pour les avions [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal].
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1723/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/1723/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Antoine Saucier, Steven Dufour, & François Soumis
Advisors:

Programme: Mathématiques de l'ingénieur
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONCEPTION ET ANALYSE D'UN SYSTÈME D'OPTIMISATION DE PLANS DE
VOL POUR LES AVIONS

WISSEM MAAZOUN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

AVRIL 2015

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONCEPTION ET ANALYSE D'UN SYSTÈME D'OPTIMISATION DE PLANS DE
VOL POUR LES AVIONS

présentée par : MAAZOUN Wissem

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. DESAULNIERS Guy, Ph. D., président

M. SAUCIER Antoine, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. DUFOUR Steven, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. SOUMIS François, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. SAUSSIÉ David, Ph. D., membre

M. DELAHAYE Daniel, Doctorat, membre externe

DÉDICACE

À mes parents.

À ma femme Neila.

À mes enfants Mohamed, Adam et Rayan.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier sincèrement mes directeurs de recherche, M. Antoine Saucier, M. Steven Dufour et M. François Soumis pour l'appui qu'ils m'ont apporté et la confiance qu'ils m'ont témoignée tout au long de ce travail. Leur disponibilité, leurs précieux conseils, leur grande rigueur, leur aide financière et leurs encouragements m'ont permis d'avancer de façon constructive. Je remercie aussi M. Charles Pestieau pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Ma reconnaissance va aussi naturellement à mes parents dont l'éducation, la confiance, l'appui moral et financier m'ont permis de m'épanouir, à ma femme qui a fait énormément pour moi, celle qui a supporté mes humeurs changeantes en fonction de l'évolution du projet, à mes enfants qui m'ont donné beaucoup de courage pour finir ce travail, à mon frère et ma sœur pour leur soutien permanent et leurs encouragements.

Je remercie également les membres du jury, M. Guy Desaulniers, M. David Saussié et M. Daniel Delahaye de bien vouloir évaluer cette thèse.

J'aimerais aussi remercier la Chaire de recherche du Canada en optimisation des grands réseaux de transport d'avoir supporté ce projet financièrement. Je remercie aussi les compagnies Thales group, RAAS et Air Canada ainsi que les fonds CRSNG et CRIAQ qui nous ont fait confiance et qui ont supporté ce projet.

J'aimerais aussi remercier Eurocontrol qui nous a donné accès aux fichiers BADA.

Merci à tous mes collègues de travail, à tous les professeurs et le personnel du Département de mathématiques et de génie industriel ainsi que ceux de toute l'École Polytechnique de Montréal.

Merci à tous.

RÉSUMÉ

L'objectif principal de cette thèse est de développer une méthode d'optimisation pour la préparation des plans de vol d'avion qui minimisent tous les coûts associés au vol. On doit calculer une trajectoire optimale pour un avion devant aller d'un aéroport de départ à un aéroport d'arrivée. La trajectoire optimale minimise la somme de tous les coûts, c'est-à-dire le coût du carburant plus le coût du temps (salaires, location de l'appareil, retards à l'arrivée, etc.).

La trajectoire optimale est obtenue en considérant toutes les trajectoires possibles sur un graphe 3D (longitude, latitude et altitude) où on utilise des niveaux d'altitude espacés de 2000 pieds, et en appliquant un algorithme de plus court chemin. L'essentiel du travail de cette thèse a été de calculer correctement la consommation de carburant sur chaque arc du graphe, en s'assurant que chaque arc ait un coût minimal et soit parcouru d'une façon réaliste du point de vue du pilotage, en respectant toutes les règles de navigation. Le calcul de coût d'un arc tient compte des conditions météorologiques (température, pression, composantes du vent, etc.). L'optimisation de chaque arc se fait à partir de l'évaluation d'une vitesse optimale qui tient compte de tous les coûts.

Chaque arc du graphe comporte en général plusieurs sous-phases de vol (changement d'altitude, changement de vitesse, vitesse et altitude constante pour un arc en phase de croisière). En phase de montée initiale et de descente finale, on détermine les coûts en utilisant une vitesse CAS (pour *Calibrated Air Speed* en anglais) constante ou un nombre de Mach constant de telle sorte que la trajectoire soit optimale.

La modélisation aérodynamique utilisée est celle qui est proposée par Eurocontrol. Elle utilise les tables BADA (pour *Base of Aircraft Data* en anglais). Cette modélisation se base sur l'équation de l'énergie totale. Cette équation permet de déterminer la consommation instantanée de carburant. Le calcul des coûts sur chaque arc passe par la résolution d'un système d'équations différentielles qui comptabilise systématiquement tous les coûts. Pour calculer le coût d'un arc, on doit connaître le temps nécessaire pour le parcourir, qui est généralement inconnu. Pour avoir des conditions aux frontières bien définies, on a utilisé le déplacement horizontal comme variable indépendante du système d'équations différentielles. On a considéré les composantes de la vitesse du vent dans un référentiel en trois dimensions pour calculer la vitesse instantanée de l'avion par rapport au sol. Notre modélisation du problème permet de calculer les coûts de chaque arc d'une façon réaliste et sans changement brusque de vitesse ou d'altitude. Pour tenir compte du coût du temps, on a utilisé l'indice du coût (CI pour *Cost Index* en anglais).

Le coût d'un arc dépend de la masse de l'avion au début de cet arc, et cette masse dépend de la trajectoire qui précède. Comme on considère toutes les trajectoires possibles, il s'ensuit que le coût d'un arc doit être calculé pour chacune des trajectoires à laquelle il appartient. Pour un long trajet, le nombre d'arcs à considérer dans le graphe est grand et donc le coût d'un arc est typiquement calculé un grand nombre de fois. Le temps de calcul du coût d'un arc est donc un critère important. Notre algorithme exécute le calcul des coûts d'un million d'arcs en quelques secondes tout en ayant une grande précision. La détermination de la trajectoire optimale pourrait donc se faire en un temps très court.

Pour qu'une trajectoire soit optimale, il faut que la masse de l'avion au départ soit aussi optimale. Il faut donc connaître la quantité de carburant optimale pour le trajet. Comme on connaît la masse de l'avion à l'arrivée, qui est la masse de l'avion incluant les passagers, le cargo et la masse de carburant de réserve, on détermine la trajectoire optimale en effectuant un calcul à rebours, c'est-à-dire du point d'arrivée au point de départ.

Pour la détermination de la trajectoire optimale, on a utilisé une grille elliptique qui a comme foyers les points de départ et d'arrivée. L'utilisation de cette grille est essentielle pour nous permettre d'avoir un graphe dirigé et acyclique. L'algorithme du plus court chemin utilisé est le plus court chemin sur un DAG (pour *Direct Acyclic Graph* en anglais). Cet algorithme est facile à implémenter et nous permet d'avoir un temps d'exécution très court.

Notre algorithme respecte les niveaux d'altitude et fournit une trajectoire optimale en ayant un coût optimal pour chaque arc. Les changements d'altitude se font d'une façon optimale selon la masse de l'avion et le coût du temps. Cet algorithme donne la masse, la vitesse, l'altitude et le coût total en tout point de la trajectoire ainsi que les profils optimaux de montée et de descente. Un prototype a été implémenté en langage C. On a fait des simulations des différents types d'arcs possibles ainsi que des trajectoires complètes pour illustrer le comportement de l'algorithme. On présente dans cette thèse les méthodes utilisées ainsi que les résultats obtenus.

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to develop an optimization method for the preparation of flight plans for aircrafts. The flight plan minimizes all costs associated with the flight. We determine an optimal path for an airplane from a departure airport to a destination airport. The optimal path minimizes the sum of all costs, i.e. the cost of fuel added to the cost of time (wages, rental of the aircraft, arrival delays, etc).

The optimal trajectory is obtained by considering all possible trajectories on a 3D graph (longitude, latitude and altitude) where the altitude levels are separated by 2,000 feet, and by applying a shortest path algorithm. The main task was to accurately compute fuel consumption on each edge of the graph, making sure that each arc has a minimal cost and is covered in a realistic way from the point of view of control, i.e. in accordance with the rules of navigation. To compute the cost of an arc, we take into account weather conditions (temperature, pressure, wind components, etc). The optimization of each arc is done via the evaluation of an optimum speed that takes all costs into account.

Each arc of the graph typically includes several sub-phases of the flight, e.g. altitude change, speed change, and constant speed and altitude. In the initial climb and the final descent phases, the costs are determined by considering altitude changes at constant CAS (Calibrated Air Speed) or constant Mach number. CAS and Mach number are adjusted to minimize cost.

The aerodynamic model used is the one proposed by Eurocontrol, which uses the BADA (Base of Aircraft Data) tables. This model is based on the total energy equation that determines the instantaneous fuel consumption. Calculations on each arc are done by solving a system of differential equations that systematically takes all costs into account. To compute the cost of an arc, we must know the time to go through it, which is generally unknown. To have well-posed boundary conditions, we use the horizontal displacement as the independent variable of the system of differential equations. We consider the velocity components of the wind in a 3D system of coordinates to compute the instantaneous ground speed of the aircraft. To consider the cost of time, we use the cost index.

The cost of an arc depends on the aircraft mass at the beginning of this arc, and this mass depends on the path. As we consider all possible paths, the cost of an arc must be computed for each trajectory to which it belongs. For a long-distance flight, the number of arcs to be considered in the graph is large and therefore the cost of an arc is typically computed many times. Our algorithm computes the costs of one million arcs in seconds while having a high accuracy. The determination of the optimal trajectory can therefore be done in a short time.

To get the optimal path, the mass of the aircraft at the departure point must also be optimal. It is therefore necessary to know the optimal amount of fuel for the journey. The aircraft mass is known only at the arrival point. This mass is the mass of the aircraft including passengers, cargo and reserve fuel mass. The optimal path is determined by calculating backwards, i.e. from the arrival point to the departure point.

For the determination of the optimal trajectory, we use an elliptical grid that has focal points at the departure and arrival points. The use of this grid is essential for the construction of a direct and acyclic graph. We use the Bellman-Ford algorithm on a DAG to determine the shortest path. This algorithm is easy to implement and results in short computation times.

Our algorithm computes an optimal trajectory with an optimal cost for each arc. Altitude changes are done optimally with respect to the mass of the aircraft and the cost of time. Our algorithm gives the mass, speed, altitude and total cost at any point of the trajectory as well as the optimal profiles of climb and descent. A prototype has been implemented in C. We made simulations of all types of possible arcs and of several complete trajectories to illustrate the behaviour of the algorithm.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 DÉFINITION DU PROBLÈME	3
2.1 Calcul du coût de carburant	4
2.2 Calcul du coût du temps	4
2.3 Détermination de la trajectoire optimale	5
CHAPITRE 3 REVUE DE LITTÉRATURE	7
CHAPITRE 4 CALCUL DES COÛTS	10
4.1 Calcul du coût de carburant	10
4.1.1 Dérivation de l'équation de l'énergie totale	10
4.1.2 Modélisation aérodynamique	13
4.1.3 Modèle atmosphérique	18
4.2 Vérification des résultats numériques	20
4.2.1 Calcul de la masse de l'avion en fonction du temps	20
4.2.2 Comparaison des valeurs calculées avec les valeurs tabulées du fichier B763____.PTF	23
4.2.3 Calcul du coût de carburant pour une trajectoire rectiligne donnée . .	24
4.3 Calcul des autres coûts	25
4.3.1 Calcul du coût du temps	25
4.3.2 Vitesse optimale	27

4.3.3	Calcul du coût de survol des territoires aériens	30
CHAPITRE 5 CALCUL DU COÛT D'UN ARC EN PHASE DE CROISIÈRE . . .		31
5.1	Équations différentielles générales	31
5.1.1	Changement de variable	32
5.1.2	Phase de croisière : expressions de f_V et de f_h pour chaque état du vol	36
5.1.3	Détermination de $\frac{dh}{dt}$ en fonction de la phase de vol	37
5.1.4	Détermination de $\frac{dV}{dt}$ pour un changement de vitesse à altitude constante en phase de croisière	38
5.1.5	Détermination de $\frac{dm}{dt}$ en phase de croisière	39
5.2	Description générale de l'algorithme du calcul à rebours du coût d'un arc complet	40
5.2.1	Détermination de la taille du pas pour chaque étape du vol	43
5.2.2	Algorithme pour l'étape de changement de vitesse	44
5.2.3	Algorithme pour l'étape de changement d'altitude	44
5.2.4	Algorithme pour l'étape de déplacement à altitude et vitesse constantes	45
5.2.5	Pseudo-code de l'algorithme de calcul du coût de l'arc au complet . .	46
5.2.6	Fonction de calcul du coût d'un arc en phase de croisière	48
5.3	Vérification de la méthode de calcul	49
5.3.1	Description de la méthode de comparaison	50
5.3.2	Résultats	52
5.3.3	Conclusion	55
5.4	Convergence et erreurs numériques	57
5.4.1	Choix du segment et des mesures	57
5.4.2	Taux de convergence	58
5.4.3	Comparaison des deux méthodes	63
5.4.4	Conclusion	65
CHAPITRE 6 CALCUL DU COÛT D'UN ARC EN PHASES DE MONTÉE INITIALE ET DE DESCENTE FINALE		66
6.1	Définition des arcs de montée initiale et de descente finale	66
6.2	Détermination de l'altitude de transition	67
6.3	Analyse des phases de montée initiale et de descente finale	70
6.4	Détermination de f_V, f_h, f_m et f_C	71
6.4.1	Expression de $\frac{dh}{dt}, \frac{dV}{dt}$ et $\frac{dm}{dt}$ pour les états 2D à 5D	71
6.4.2	Expression de $\frac{dh}{dt}, \frac{dV}{dt}$ et $\frac{dm}{dt}$ pour les états 2M à 5M	72
6.5	Algorithme de calcul à rebours du coût d'un arc	74
6.5.1	Étapes de calcul du coût pour un arc en descente finale	76

6.5.2	Étapes de calcul du coût pour un arc en montée initiale	77
6.5.3	Choix de la taille de pas pour chaque état	78
6.5.4	Coût d'un arc de décélération en phase de descente finale (état 1D) .	79
6.5.5	Coût d'un arc d'accélération en phase de montée initiale (état 6M) .	81
6.5.6	Coût d'un arc de descente en phase de descente finale (états 2D à 5D)	81
6.5.7	Coût d'un arc de montée en phase de montée initiale (états 2M à 5M)	83
6.5.8	Pseudo-code de l'algorithme de calcul du coût d'un arc	84
6.5.9	Fonction de calcul du coût d'un arc en phase de descente finale et de montée initiale	86
6.6	Vérification de la méthode de calcul du coût des arcs en phase de descente finale et de montée initiale	86
6.6.1	Comparaison des valeurs calculées avec les valeurs tabulées du fichier B763____.PTF	86
6.6.2	Vérification des résultats numériques de la méthode de calcul du coût	87
CHAPITRE 7 CONSTRUCTION DE LA GRILLE ET DÉTERMINATION DE LA TRAJECTOIRE OPTIMALE		91
7.1	Construction de la grille	91
7.1.1	Géométrie de la grille	91
7.1.2	Système de coordonnées	94
7.1.3	Structure des nœuds et initialisation de la grille	99
7.1.4	Détermination des conditions météorologiques	103
7.1.5	Définition d'un voisinage pour chaque nœud de la grille	104
7.2	Détermination du plus court chemin dans la grille	107
7.2.1	Phase de descente finale et optimisation de la vitesse de descente . . .	107
7.2.2	Phase de croisière	110
7.2.3	Phase de montée initiale et optimisation de la vitesse de montée . . .	110
7.2.4	Calcul de la trajectoire optimale	111
7.3	Exemples de trajectoires optimales et discussion des résultats	111
7.4	Ajustements de la discrétisation de la grille	118
CHAPITRE 8 CONCLUSION		120
8.1	Synthèse des travaux	120
8.2	Limitations de la solution proposée	121
8.3	Améliorations futures	121
RÉFÉRENCES		122

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Définition des symboles de l'équation (4.10).	13
Tableau 4.2	Définition des symboles des équations (4.13), (4.14) et (4.15).	14
Tableau 4.3	Définition des symboles des équations (4.29) et (4.31).	18
Tableau 4.4	Tableau des constantes BADA pour le fichier B763____.OPF.	20
Tableau 4.5	Tableau des constantes pour le calcul de α	21
Tableau 5.1	Détermination des fonctions f_h et f_V suivant l'état du vol.	37
Tableau 5.2	Détermination de T_{\max} suivant la phase du vol.	39
Tableau 5.3	Tableau des résultats des deux méthodes avec altitude et vitesse constantes en utilisant $V = 255$ m/s et $m_2 = 208\,700$ kg.	53
Tableau 5.4	Tableau des résultats des deux méthodes avec changement d'altitude et de vitesse, avec vitesse de vent nulle en utilisant $V_1 = 250$ m/s, $V_2 = 255$ m/s et $m_2 = 208\,700$ kg.	53
Tableau 5.5	Tableau des résultats des deux méthodes avec changement d'altitude et de vitesse, avec vitesse de vent non nulle en utilisant $V_1 = 250$ m/s, $V_2 = 255$ m/s et $m_2 = 208\,700$ kg.	54
Tableau 6.1	Choix de la taille du pas en phase de montée initiale.	79
Tableau 6.2	Choix de la taille du pas en phase de descente finale.	80
Tableau 6.3	Expression de $ESF(M)$ et nom de la fonction RK-4 utilisée en fonction de l'état du vol en phase de descente finale.	82
Tableau 6.4	Expression de $ESF(M)$ et nom de la fonction RK-4 utilisée en fonction de l'état du vol en phase de montée initiale.	83
Tableau 7.1	Les coordonnées des points N_C, N_D et N_F dans le repère (O, X', Y', Z')	95

LISTE DES FIGURES

Figure 4.1	Schémas de la distribution de portance et graphe des coefficients de moments en fonction de l'angle d'incidence (tiré de Kermode (2006) figure 3.11, p. 76 et figure 3.18, p. 87).	16
Figure 4.2	Coefficient de portance C_L en fonction de l'angle d'incidence (tiré de Blake (2009), figure 9-29 p. 9-17).	16
Figure 4.3	Graphes de la masse $m(t)$, du débit massique de carburant FF_{cr} , de l'angle d'incidence $\alpha(t)$ et de $\cos(\alpha(t))$ de l'avion en régime de croisière à altitude et vitesse constantes ($h = 10\,058,4$ m, $V = 240$ m/s, $m_0 = 150\,000$ kg).	21
Figure 4.4	Graphe de l'angle d'incidence α en régime de croisière à altitude et vitesse constantes ($h = 10\,058,4$ m, $V = 240$ m/s) en fonction de la masse m	22
Figure 4.5	Graphes de l'angle d'incidence α en régime de croisière pour une masse de $m_0 = 150\,000$ kg pour différents niveaux d'altitudes en fonction de la vitesse V	22
Figure 4.6	Graphe du débit massique de carburant en croisière FF_{cr} calculé numériquement et les valeurs tabulées du fichier B763____.PTF.	24
Figure 4.7	Schéma des vitesses au sol, du vent et par rapport à l'air entre deux points donnés.	25
Figure 4.8	Approximation de l'indice du coût CI (tiré de Speyer (2006), p. 34)	27
Figure 4.9	Graphes de la distance spécifique SR en fonction de la vitesse V pour différentes valeurs de la masse m	28
Figure 4.10	Graphes de la distance spécifique SR en fonction de la vitesse V pour différentes valeurs de l'indice du coût CI.	29
Figure 4.11	Graphes de la distance spécifique SR en fonction de la vitesse V pour différentes valeurs de l'altitude h	29
Figure 5.1	Illustration des étapes de calcul d'un arc typique en phase de croisière.	41
Figure 5.2	Profil de l'altitude h en m en fonction de la distance parcourue en m en phase de croisière.	56
Figure 5.3	Profil de la vitesse propre V en m/s en fonction de la distance parcourue en m en phase de croisière.	56
Figure 5.4	Écart de masse Δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'accélération.	60

Figure 5.5	Écart de masse δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'accélération.	60
Figure 5.6	Les figures 5.4 et 5.5 superposées.	61
Figure 5.7	Écart de masse Δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'ascension.	62
Figure 5.8	Écart de masse δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'ascension.	62
Figure 5.9	Les figures 5.7 et 5.8 superposés.	63
Figure 5.10	Comparaison des courbes de convergence des deux méthodes.	64
Figure 6.1	Graphes de V en fonction de h pour différentes valeurs de V_{CAS} en traits fins (équation (6.1)) et pour différentes valeurs de M en traits gras (équation (5.19)).	67
Figure 6.2	Profil de l'altitude h en fonction de la distance parcourue en phase de descente finale.	88
Figure 6.3	Profil de la vitesse propre V en fonction de la distance parcourue en phase de descente finale.	89
Figure 6.4	Profil de l'altitude h en fonction de la distance parcourue en phase de montée initiale.	90
Figure 6.5	Profil de la vitesse propre V en fonction de la distance parcourue en phase de montée initiale.	90
Figure 7.1	Schéma illustrant une section de l'hémisphère terrestre et les nœuds de la grille de calcul (représentés par des points situés au-dessus de la surface de la Terre) pour l'algorithme de plus court chemin dans le plan (N_D, O, N_F)	92
Figure 7.2	Illustration des points de référence en 3D.	93
Figure 7.3	Illustration des quatre rotations en 3D pour effectuer le changement des repères.	96
Figure 7.4	Grille de calcul représentée sur une sphère en trois dimensions.	101
Figure 7.5	Représentation des nœuds de la grille incluant les régions de montée initiale et de la descente finale.	105
Figure 7.6	Schéma des voisins d'un nœud (ii, jj) de la grille de calcul sur un niveau d'altitude.	106
Figure 7.7	Coût total d'un arc de descente finale en fonction de $V_{CAS,des}$	108
Figure 7.8	Coût total du même arc que celui de la figure 7.7 avec une valeur de CI plus petite.	108

Figure 7.9	Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\min} (le niveau d'altitude k en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).	112
Figure 7.10	Profil de vitesse de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\min} (la vitesse V en m/s en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).	112
Figure 7.11	Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{moyen} (le niveau d'altitude k en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).	113
Figure 7.12	Profil de vitesse de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{moyen} (la vitesse V en m/s en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).	113
Figure 7.13	Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\max} (le niveau d'altitude k en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).	114
Figure 7.14	Profil de vitesse de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\max} (la vitesse V en m/s en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).	114
Figure 7.15	Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Rio de Janeiro avec m_{\min}	116
Figure 7.16	Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Rio de Janeiro avec m_{moyen}	116
Figure 7.17	Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Rio de Janeiro avec m_{\max}	116
Figure 7.18	Profil horizontal de la trajectoire avec vitesse de vent nulle.	117
Figure 7.19	Profil horizontal de la trajectoire avec vitesse de vent non nulle.	117

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le transport aérien représente un secteur économique important au Canada. On peut citer deux extraits de rapports d'organisations canadiennes :

L'industrie canadienne du transport aérien est au cœur de l'économie du 21^e siècle de notre pays. Sans une industrie aéroportuaire et aérienne concurrentielle et efficace, le monde des affaires et les institutions sociales du Canada ne fonctionneraient pas à leur plein potentiel. Le transport aérien permet aux Canadiens de rester en contact, il permet aux familles d'explorer d'autres parties du monde, et il est aussi au cœur de l'avenir économique du Canada. (CAC : Le Conseil des Aéroports du Canada (2014))

Nous avons estimé auparavant que l'industrie du transport aérien laisse une empreinte économique, notamment des répercussions directes, indirectes et dérivées de 35 G\$ en PIB et de plus de 400 000 emplois, et qu'elle représente plus de 12 G\$ dans les soldes budgétaires des administrations publiques. (Gill et Raynor (2013))

D'autres articles mentionnent l'importance de cette industrie dans le monde :

Le transport aérien occupe désormais une place majeure dans l'économie mondiale, à la fois par l'importance de ses infrastructures et de ses équipements, par ses flux (40% des exportations mondiales de produits manufacturés en valeur empruntent l'avion) et par son dynamisme. (Tounsi (2000))

L'optimisation des plans de vol d'avions est un problème que plusieurs centres de recherche, organismes nationaux et internationaux ainsi que plusieurs compagnies associées au transport aérien sont intéressés à résoudre. Ce problème consiste à déterminer un plan de vol (une trajectoire) qui minimise le coût du vol. Ces dernières décennies, le nombre de passagers qui utilisent le transport aérien a augmenté d'une façon considérable, ce qui a grandement augmenté le nombre de vols à gérer pour les compagnies aériennes. Cette augmentation a causé des congestions dans certains secteurs aériens, surtout au voisinage des aéroports. Par conséquent, on voit plus de délais d'attente pour les décollages et les atterrissages, ce qui peut être la cause de retards de vols. Ces retards engendrent des coûts importants pour les transporteurs aériens. De plus, le nombre de compagnies aériennes a aussi augmenté. Il s'agit

souvent de compagnies à bas prix (pour *low-cost* en anglais), ce qui a augmenté la concurrence. Par conséquent, les compagnies aériennes veulent minimiser les coûts d'opération pour offrir des prix concurrentiels. Ces facteurs, auxquels s'ajoutent l'augmentation du coût du carburant et l'intérêt pour la protection de l'environnement, mènent les compagnies aériennes à vouloir minimiser la consommation de carburant pour maintenir les prix bas et pour réduire les émissions de gaz à effet de serre. Les groupes intéressés à résoudre ce problème sont les constructeurs d'avions, les compagnies aériennes, les organismes d'aviation civile et les entreprises qui offrent les services matériels et logistiques.

Pour ces raisons, une bonne planification des plans de vol des avions est nécessaire. Ces plans devraient réduire la consommation de carburant, le temps de vol et la congestion des secteurs importants. Ces plans nécessitent un calcul précis des coûts en tenant compte des conditions météorologiques (les changements de température, la vitesse des vents, etc.). Ces calculs dépendent de plusieurs paramètres (les caractéristiques de l'avion, l'altitude et la vitesse du vol, etc.).

Cette thèse est au cœur des trois axes d'un grand projet de recherche industriel qui porte sur des problèmes de mise à jour de plans de vol, sur la gestion du trafic aérien ainsi que sur la simulation d'avions. Les méthodes de calcul des coûts développées dans le cadre de cette thèse seront à la base des développements des trois axes de ce projet.

Objectifs

L'objectif principal de cette thèse est de développer une méthode d'optimisation pour la préparation de plans de vol d'avion qui minimisent tous les coûts associés au vol. Pour résoudre ce problème, nous devons :

- calculer le coût de carburant ;
- tenir compte de la météo dans le calcul ;
- considérer le coût du temps dans le calcul ;
- déterminer une grille qui contient la trajectoire optimale ;
- trouver le plus court chemin dans cette grille ;
- déterminer une trajectoire optimale pour le vol.

CHAPITRE 2

DÉFINITION DU PROBLÈME

Un vol d'avion est caractérisé par l'aéroport de départ, la date et l'heure prévues de départ, l'aéroport d'arrivée, la date et l'heure prévues d'arrivée, le type d'avion et la masse de l'avion sans carburant. À partir des données d'un vol désigné, un système de plans de vol détermine une trajectoire optimale qui minimise les coûts en considérant le prix du carburant, les coûts d'opération, les coûts de retard à l'arrivée, les coûts de survol des territoires aériens, les conditions météorologiques (température, pression atmosphérique, vitesse et direction des vents, perturbations, etc.), les zones interdites (zones militaires, turbulences, etc.) et les limitations de vitesse et d'altitude dans certaines régions.

On veut déterminer une trajectoire de vol de coût minimum. Cette trajectoire est spécifiée en donnant la position de l'avion dans l'espace à tout instant t du vol. Pour déterminer cette trajectoire, on devrait utiliser la méthode du plus court chemin sur une grille espace-temps en quatre dimensions (4D).

La grille utilisée est une grille 4D où chaque nœud est caractérisé par les paramètres suivants :

- la longitude ;
- la latitude ;
- l'altitude ;
- le temps.

On associe à chaque arc reliant deux nœuds de la grille un coût de carburant, de temps et de survol des territoires aériens. On veut déterminer un chemin de coût minimal qui relie le nœud de départ au nœud d'arrivée qui représentent les aéroports de départ et d'arrivée.

Puisque le stockage d'une grille 4D demande beaucoup de mémoire, nous utilisons plutôt une approximation. Cette méthode consiste à déterminer la trajectoire de coût minimal à partir d'une grille en trois dimensions (3D), où on considère seulement les trois composantes de l'espace. Pour tenir compte du coût du temps, on utilise l'indice du coût, appelé *cost index* (CI) en anglais. Le CI est le rapport du coût du temps par minute sur le prix du carburant par kilogramme. Le CI est une fonction qui s'additionne au débit massique de carburant pour donner une fonction de coût total.

2.1 Calcul du coût de carburant

Un des objectifs de ce projet est de déterminer une trajectoire optimale pour un vol d'avion. La consommation de carburant fait partie des coûts principaux à minimiser. On utilise la modélisation BADA d'Eurocontrol (Nuic (2009)) pour le calcul du coût du carburant. On calcule le débit massique de carburant (*Fuel Flow* (FF) en anglais) qui est une fonction de plusieurs variables :

$$\text{FF} := f \left(m(t), V(t), \frac{dV}{dt}, h(t), \frac{dh}{dt} \right),$$

où f est une fonction réelle et $m(t)$, $V(t)$, $h(t)$ sont respectivement la masse, la vitesse et l'altitude de l'avion à l'instant t . Puisque le taux de variation de la masse de l'avion ne dépend que du carburant consommé, alors

$$\frac{dm}{dt} = -\text{FF}.$$

Cette dernière équation, qui est une équation différentielle du premier ordre pour $m(t)$, est à la base de notre méthode de calcul de la consommation de carburant.

2.2 Calcul du coût du temps

Le deuxième critère qu'on doit considérer est le coût du temps. Ce coût est composé des coûts d'opération (coûts d'utilisation de l'avion, salaires de l'équipage, etc.) et les coûts associés au retard à l'arrivée (location de l'emplacement de l'avion à l'aéroport, coût associé à la satisfaction des passagers, coûts engendrés par les correspondances manquées, etc.).

La considération de ce coût dans le calcul consiste à utiliser l'indice du coût CI qui est donné par la relation suivante :

$$\text{CI (kg/min)} = \frac{\text{coût du temps par minute (\$/min)}}{\text{prix du carburant par kilogramme (\$/kg)}}.$$

Le CI est alors additionné à la consommation de carburant dm/dt et on obtient le coût instantané total en kg de carburant par minute. Si on dénote par $C(t_1)$ le coût total à l'instant t_1 , on peut alors le représenter sous la forme

$$C(t_1) := \int_0^{t_1} \left(-\frac{dm}{dt} + \text{CI} \right) dt.$$

L'utilisation du CI permet de simplifier le problème 4D à un problème en trois dimensions car le coût du temps est inclus dans la fonction CI.

2.3 Détermination de la trajectoire optimale

Dans le cadre de cette thèse, on ne considère pas les coûts de survol des territoires aériens. En fait, on considère que le coût est composé uniquement des coûts de carburant et de temps. Comme les phases de décollage et d'atterrissage sont gérées par les aéroports de départ et d'arrivée et par l'ATC (*Air Traffic Control*), on doit déterminer la trajectoire de coût minimal qui relie les deux points N_D et N_F qui représentent les nœuds où l'avion atteint l'altitude de 10 000 pieds en montée et en descente respectivement.

On doit déterminer la trajectoire optimale qui relie les points N_D et N_F en tenant compte des entrées-sorties suivantes :

Entrées :

- Type et caractéristiques de l'avion ;
- Valeur du CI ;
- Point de départ N_D :
 - Coordonnées horizontales x_D et y_D (en m) ;
 - Altitude $h_D = 10\,000$ pieds ;
 - Vitesse de départ V_D en m/s qui correspond à la vitesse V_{CAS} de 250 nœuds, où CAS (*Calibrated Air Speed* en anglais) représente la vitesse mesurée par le tube *Pitot* de l'avion (un appareil mesurant les pressions totale et statique) ;
 - Masse m_D inconnue (en kg).
- Point d'arrivée N_F :
 - Coordonnées horizontales x_F et y_F (en m) ;
 - Altitude $h_F = 10\,000$ pieds ;
 - Vitesse finale V_F (en m/s) qui correspond à la vitesse V_{CAS} de 250 nœuds ;
 - Masse m_F connue (en kg) qui correspond à la somme de la masse de l'avion sans carburant, de la masse du carburant nécessaire pour rejoindre l'aéroport d'arrivée et de la masse du carburant de réserve.

Sorties :

- Masse de l'avion m_D en kg au point N_D ;
- Altitude, vitesse et masse en tout point de la trajectoire située entre N_D et N_F ;
- Temps nécessaire pour parcourir la trajectoire en s ;
- Coût total du carburant et du temps en kg.

Pour déterminer la trajectoire optimale, on définit un graphe (un ensemble de nœuds et d'arcs) qui couvre la région où le vol peut avoir lieu. Nous utilisons les points de la grille météo qui est discrétisée aux demi-degrés en longitude et latitude et à différents niveaux de pression en altitude. Puisque cette grille est donnée pour tout le globe terrestre et que nous

n'avons pas à l'utiliser en entier, nous utiliserons une grille limitée à une région de forme elliptique dont les foyers sont les points N_D et N_F .

Comme on ne connaît la masse de l'avion qu'au point N_F (à l'arrivée), la trajectoire sera déterminée à l'aide d'un calcul à rebours, c'est-à-dire du point d'arrivée au point de départ. On fait le calcul de la trajectoire en trois phases :

- la première phase est celle de la descente finale. Cette phase est la trajectoire reliant le point N_{fc} , qui est le nœud situé à l'altitude de croisière où commence la descente, et le point N_F ;
- la deuxième est la phase de croisière. Cette phase est la trajectoire reliant le point N_{dc} , qui est le nœud situé à l'altitude de croisière où finit la montée, et le point N_{fc} ;
- la troisième phase est celle de la montée initiale, qui est la trajectoire reliant les points N_D et N_{dc} .

Pour chacune de ces trois phases, on doit calculer les coûts des arêtes qui relient les nœuds voisins de la grille. Enfin, on doit utiliser un algorithme de plus court chemin pour déterminer la trajectoire optimale.

CHAPITRE 3

REVUE DE LITTÉRATURE

La plupart des recherches qui ont été faites dans ce domaine sont brevetées. Nous présentons ici les brevets qui nous ont semblé être les plus pertinents et les plus représentatifs. Parmi ces brevets, on peut citer Chakravarty (1995) de la compagnie Boeing. L'algorithme décrit dans ce brevet donne une trajectoire qui minimise le coût de carburant dans une grille en deux dimensions, soit la longitude et la latitude, tout en considérant des fenêtres pour l'altitude et la vitesse pour l'optimisation du temps. Boroujerdi et Uhlmann (2002) décrivent un algorithme de recherche du plus court chemin sur un graphe avec des contraintes d'angles de virage pour l'avion. Le travail effectué dans le cadre de ce brevet a été publié dans une revue scientifique (Boroujerdi et Uhlmann (1998)) où on décrit une transformation du graphe en un graphe de ligne où on peut éliminer les arêtes qui ne respectent pas les contraintes sur les angles de virage. Ils utilisent l'algorithme de Dijkstra pour trouver le plus court chemin. L'algorithme proposé dans Boroujerdi et Uhlmann (2002) est efficace pour les graphes de petite taille, mais il est presque inutilisable pour les graphes de grande taille. Les brevets les moins récents utilisent une grille à deux dimensions avec des nœuds fixes. Il y a aussi les travaux de Adams et McKenzie (1989), où on cherche la trajectoire de coût minimum dans une grille à deux dimensions sans optimiser l'altitude et le temps. D'autres travaux menés par Baoxing Tang et Mukherjee (2000), déterminent la trajectoire de coût minimum en deux étapes. La première étape consiste à trouver une trajectoire parmi une liste de trajectoires fixes en deux dimensions. Cette trajectoire minimise les coûts en tenant compte de la météo. La deuxième étape consiste à déterminer les vitesses et altitudes optimales pour la trajectoire choisie à la première étape. D'autres brevets, comme celui de Myers (2000), déterminent la trajectoire de coût minimum en minimisant une fonction objectif qui est une sommation des coûts de carburant, du temps et d'autres coûts en utilisant une pondération pour chaque coût. Les premiers brevets abordant le problème en quatre dimensions sont ceux de Schultz et Shaner (2001) et de Schultz et al. (2003), où on utilise le CI pour tenir compte de la quatrième dimension qu'est le temps. Enfin on peut souligner le brevet de Verlut et Lohmiller (2010), où on décrit comment la trajectoire de coût minimum en trois dimensions est obtenue et comment on ajoute le coût du temps associé à chaque arête. Pour la détermination de cette trajectoire, on considère les régions interdites et on peut utiliser un des algorithmes de plus court chemin (Dijkstra, Ford-Bellman, A*). D'autres brevets décrivent les systèmes et procédures utilisés pour la préparation des plans de vol. Parmi ces brevets, on cite Agam

et Agam (2009) et Endo et al. (2008), où on décrit les interfaces informatiques et la nature du matériel disponible pour cette préparation. On remarque que ces brevets représentent les meilleures solutions, déterminent la trajectoire dans un espace à trois dimensions et utilisent le CI qu'ils considèrent comme une constante. De plus, ils ne discutent pas des conditions météorologiques, alors que ces conditions sont une grande source d'erreur.

Pour déterminer la trajectoire de coût minimum, on doit calculer le coût de chaque arête et en particulier le coût du carburant. Pour déterminer ce coût, on doit étudier les équations de l'aérodynamique de l'avion. Le centre expérimental d'Eurocontrol (pour *Eurocontrol Experimental Center* en anglais) a développé les outils nécessaires pour décrire l'aérodynamique et la performance des avions. Eurocontrol a aussi donné les équations de conservation de l'énergie de l'avion et a déterminé les constantes qui servent à calculer la consommation d'essence pour chaque type et configuration d'avion. Ces équations ainsi que leur utilisation et développement sont donnés dans Nuic (2009). Ce document décrit les équations qui servent au calcul de la consommation de carburant pour les différentes phases de vol. On y explique aussi comment calculer la performance et on y donne les limitations de l'avion. On peut aussi mentionner l'article de Nuic et al. (2005), où on teste la validité de ces équations et où on estime l'erreur que l'on peut commettre lors de leur utilisation, et les travaux effectués par Airbus pour les performances des avions, dont le rapport de *Flight Operations Support & Line Assistance* (2002) et le rapport de *Flight Operations Support & Line Assistance* (1998). Ce dernier document démontre l'efficacité du CI ainsi que son utilisation. Puisque le coût du temps par minute est une fonction du temps qui dépend de plusieurs facteurs (coût des opérations, coût du retard, coût de l'entretien, etc.), plusieurs recherches sont effectuées pour l'estimer. Parmi ces travaux on peut citer Speyer (2006), le rapport *Transport Studies Group, University Of Westminster, London* (2007) et Cook et al. (2007).

D'autres travaux traitent de l'estimation des erreurs qui sont engendrées par la météo ou les erreurs humaines. On peut citer Lüdtke et al. (2010), où on étudie les erreurs des pilotes et la correction de ces erreurs par le FMS (pour *Flight Management System* en anglais). Green et al. (2000) traitent d'un travail effectué par la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) où ils ont effectué des tests de vol pour étudier l'erreur de la prédiction de la vitesse du vent sur la trajectoire prédite. On peut citer d'autres travaux effectués par la NASA pour étudier l'erreur dans la prédiction des vents, comme ceux de Consiglio et Allen (2009) et de Schwartz et al. (2000). Cette étude compare deux systèmes de prédictions de météo, soit les systèmes RUC-1 et RUC-2, pour des vols couvrant une période de treize mois. L'IATA (*International Air Transport Association*) et Air France ont aussi étudié ce problème. Le rapport IATA (2007) explique les divers coûts associés aux vols d'avions et les éléments qu'on peut améliorer pour faire plus d'économies.

Filippone (2008) a fait une synthèse de l'état de l'art sur le calcul des performances des avions. Il évoque que les publications dans ce domaine sont rares et espacées. Il explique aussi que ces publications ne montrent pas clairement les équations et les méthodes utilisées et que les résultats donnés ne sont pas satisfaisants.

Une thèse récente (Girardet (2014)) qui a été faite en parallèle à cette thèse aborde le problème de la détermination de la trajectoire optimale avec une méthode de propagation d'un front d'onde. Cette méthode, qui est basée sur une modélisation des coûts simplifiée par rapport à la nôtre (trajectoire courte avec masse, vitesse et altitude constantes), permet d'obtenir une trajectoire optimale lisse en deux dimensions, sans effet de grille (sans zigzag). Cette trajectoire lisse n'est pas contrainte à passer par les nœuds d'une grille. En comparaison, dans cette thèse, on a résolu le problème des vols long-courriers en quatre dimensions en utilisant une modélisation des coûts plus réaliste et par conséquent plus complexe (optimisation sur chaque arc de la vitesse et de l'altitude en tenant compte de la masse décroissante de l'avion et des vents), mais en utilisant une discrétisation de l'espace (une grille) qui résulte en une trajectoire non lisse qui est voisine de la trajectoire optimale.

À notre connaissance, les contributions originales de cette thèse sont les suivantes :

- une modélisation mathématique qui permet un calcul numérique précis des coûts des arcs ;
- Une optimisation du coût de chaque arc qui tient compte des règles de pilotage utilisées en aviation civile ;
- la prise en compte des conditions météorologiques (les composantes de la vitesse du vent et les différences de température et de pression par rapport à ISA) ;
- le calcul des coûts de chaque arc est fait d'une façon dynamique ;
- la définition d'une grille ayant un ordre topologique qui permet une détermination rapide du plus court chemin tout en respectant le calcul dynamique du coût de chaque arc ;
- La synthèse et l'assemblage de tous ces éléments en un prototype complet permettant le calcul de la trajectoire optimale.

CHAPITRE 4

CALCUL DES COÛTS

Les coûts principaux associés à un vol d'avion sont :

- le coût de carburant ;
- le coût du temps (salaires, retards, etc.) ;
- le coût de survol des territoires aériens.

La trajectoire optimale doit minimiser la somme de tous ces coûts. Il est donc nécessaire de savoir calculer chacun de ces coûts. On présente dans ce chapitre les méthodes utilisées pour ces calculs.

4.1 Calcul du coût de carburant

Le premier coût à calculer est celui du carburant. D'après le rapport *IATA Economics* (2010), depuis 2008, la portion du coût du carburant a augmenté et est devenue le coût le plus important pour les compagnies de transport aérien. Ce document se base sur un échantillon de 45 compagnies aériennes parmi les plus importantes. Dans cet échantillon, le coût du carburant représente environ 32,3% du coût total d'exploitation. Comme le coût du carburant est le coût le plus important et qu'on doit déterminer la trajectoire optimale qui minimise tous les coûts, on doit d'abord savoir calculer ce coût avec autant de précision que possible.

4.1.1 Dérivation de l'équation de l'énergie totale

L'équation de l'énergie totale est à la base de tous nos calculs de consommation de carburant pour les avions. Il est donc pertinent de comprendre son origine. On propose ici une dérivation de cette équation à partir de la seconde loi du mouvement de Newton, tout en tenant compte de considérations aérodynamiques propres aux avions.

On applique la seconde loi du mouvement de Newton dans un référentiel d'inertie qui se déplace à une vitesse constante et égale à la vitesse du vent. Ce choix permet une simplification des équations du mouvement. En effet, si on choisit plutôt un référentiel fixe par rapport au sol, alors les équations du mouvement contiennent de nombreux termes supplémentaires qui dépendent justement de la vitesse du vent.

Pour un avion, la seconde loi du mouvement de Newton prend la forme particulière

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{T} + \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

où m est la masse de l'avion, \mathbf{V} est sa vitesse propre (par rapport à l'air), \mathbf{T} est la force de propulsion et \mathbf{F} est la somme des forces extérieures (c'est-à-dire autres que la propulsion) appliquées sur l'avion.

On peut toujours multiplier les deux côtés de l'équation (4.1) par \mathbf{V} (au sens du produit scalaire) pour obtenir

$$m \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (\mathbf{T} + \mathbf{F}) \cdot \mathbf{V}. \quad (4.2)$$

Le glissement de l'avion dans l'air produit une force qui peut être décomposée en deux composantes orthogonales. La première est la portance \mathbf{L} (*lift* en anglais) qui est, par définition, orthogonale à \mathbf{V} . La seconde est une force de traînée \mathbf{D} (*drag* en anglais) qui est, par définition, colinéaire et opposée à \mathbf{V} . La somme des forces extérieures appliquées sur l'avion prend donc la forme

$$\mathbf{F} = m \mathbf{g} + \mathbf{D} + \mathbf{L}, \quad (4.3)$$

où \mathbf{g} est l'accélération gravitationnelle ($g \approx 9,806\,65 \text{ m/s}^2$).

Si on substitue l'équation (4.3) dans l'équation (4.2), on obtient

$$m \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} - m \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{V}. \quad (4.4)$$

D'une part, on peut toujours écrire

$$\begin{aligned} m \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) \\ &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (V^2) \\ &= m V \frac{dV}{dt}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $V := \|\mathbf{V}\|$. En général, pour un vecteur \mathbf{X} , on écrira $\|\mathbf{X}\| = X$.

D'autre part, si $\mathbf{r}(t)$ est un vecteur donnant la position de l'avion en fonction du temps

dans un référentiel au sol, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
 m \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} &= m \mathbf{g} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
 &= m \frac{d}{dt} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \\
 &= m \frac{d}{dt} (-g h) \\
 &= -m g \frac{dh}{dt},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

où on a supposé que les axes x et y sont perpendiculaires et horizontaux tandis que l'axe h pointe verticalement vers le haut, de telle sorte que $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

En substituant les identités (4.5) et (4.6) dans l'équation (4.4), on obtient

$$m V \frac{dV}{dt} + m g \frac{dh}{dt} = (\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{V}. \tag{4.7}$$

D'une part, la portance est *orthogonale* à la vitesse de l'avion, de sorte que

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{4.8}$$

D'autre part, la traînée pointe dans la direction opposée à la vitesse tandis que la propulsion pointe approximativement dans la même direction que la vitesse. On peut donc toujours écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} &= T V \cos(\alpha); \\
 \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} &= -D V,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

où α est l'angle d'incidence entre les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{T} .

Si on utilise les identités (4.8) et (4.9) dans l'équation (4.7), on obtient alors

$$(T \cos(\alpha) - D) V = m V \frac{dV}{dt} + m g \frac{dh}{dt}, \tag{4.10}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme équivalente

$$(T \cos(\alpha) - D) V = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V^2 + m g h \right). \tag{4.11}$$

L'équation (4.10) est à la base de nos calculs de consommation de carburant pour les avions. L'équation (4.11) met en évidence que le travail des forces extérieures sur l'avion (poussée et traînée) produit une variation de l'énergie totale de l'avion qui est la somme de son énergie cinétique $\frac{1}{2} m V^2$ et de son énergie potentielle $m g h$. Dans un référentiel qui se déplace avec la vitesse du vent (supposée constante), la conservation de l'énergie conduit à l'équation de

l'énergie totale (4.10), où les variables sont définies au tableau 4.1.

Tableau 4.1 Définition des symboles de l'équation (4.10).

Symbole	Définition	Unité
T	poussée parallèle au vecteur vitesse de l'avion	N
D	traînée aérodynamique	N
m	masse de l'avion	kg
h	altitude	m
g	accélération gravitationnelle	9,806 65 m/s ²
V	vitesse propre de l'avion	m/s
α	angle d'incidence	radian
t	temps	s

Si on spécifie $h(t)$ et $V(t)$, alors il existe une relation qui permet de calculer D en fonction de m , g , V , S (la surface des ailes) et h , de sorte que l'équation (4.10) permet de déduire T . Il existe ensuite une autre relation qui permet de calculer la consommation de carburant en fonction de T et V .

4.1.2 Modélisation aérodynamique

À partir de l'équation (4.10), on peut déduire que

$$T \cos(\alpha) = \frac{mg}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt} + D. \quad (4.12)$$

D'après Nuic (2009), les forces de traînée D et de portance L sont données par :

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D; \\ L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S \cos(\phi), \end{cases} \quad (4.13)$$

où le terme $\frac{1}{2} \rho V^2$ est la pression cinétique, S est la surface portante et les divers paramètres sont définis au tableau 4.2. Sous des conditions nominales, le coefficient de traînée C_D est une fonction du coefficient de portance C_L et du nombre de Mach M et il est donné par

$$C_D = (C_{D0} + C_{D2} C_L^2) (1 + C_{M16} M^{16}), \quad (4.14)$$

où C_L est donné par

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S \cos(\phi)}. \quad (4.15)$$

Tableau 4.2 Définition des symboles des équations (4.13), (4.14) et (4.15).

Symbole	Définition	Unité
ρ	masse volumique de l'air	kg/m ³
S	surface des ailes de l'avion	m ²
C_D	coefficient de traînée	s ⁻¹
C_{D0}	coefficient de traînée à portance nulle	s ⁻¹
C_{D2}	coefficient de traînée induite par la portance	s ⁻¹
C_L	coefficient de portance	sans unité
C_{M16}	coefficient de traînée due à la compressibilité	sans unité
ϕ	angle de roulis	radian

Dans l'équation (4.14), le facteur $C_{D2} C_L^2$ représente la traînée induite par la portance qui résulte des tourbillons au bout des ailes. L'expression $(C_{D0} + C_{D2} C_L^2)$ est la traînée polaire qui est une relation quadratique entre le coefficient de traînée et de portance. Aux grandes vitesses, lorsque la vitesse de l'avion s'approche de la vitesse du son, c'est-à-dire pour $M \gtrsim 0,7$, le coefficient de traînée C_D augmente plus rapidement que prévu par la traînée polaire. Cette augmentation est due à l'effet de compressibilité de l'air aux vitesses transsoniques. Le modèle BADA utilise le facteur $(1 + C_{M16} M^{16})$ pour la correction de l'effet de compressibilité du coefficient de traînée.

Dans le cas d'un vol horizontal, on obtient

$$m g = L + T \sin(\alpha) \quad (4.16)$$

dans un plan vertical et en supposant un quasi-équilibre de forces verticales. Puisque la force de la poussée T est petite par rapport au poids de l'avion ($m g > 10 T_{\max}$) et que l'angle α est petit ($\alpha < 12^\circ$), le terme $T \sin(\alpha)$ est alors négligeable par rapport à $m g$. On peut alors conclure que

$$L \approx m g. \quad (4.17)$$

De plus, l'angle de roulis ϕ est généralement petit et est nul en vol horizontal de sorte que $\cos(\phi) \simeq 1$. L'équation (4.15) prend donc la forme simplifiée

$$C_L = \frac{m g}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}. \quad (4.18)$$

D'après Boiffier (2000), section 5.2.1, le coefficient de portance C_L est une fonction linéaire de α lorsque $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_{\max}]$, où α_0 représente l'angle de portance nulle et α_{\max} est l'angle de

décrochage. Si $\alpha < \alpha_{\max}$, alors

$$C_L = C_{L\alpha} (\alpha - \alpha_0), \quad (4.19)$$

où $C_{L\alpha}$ est le gradient de portance. Pour un avion de ligne, l'aile est droite et à répartition de portance elliptique. Pour un vol subsonique, $C_{L\alpha}$ peut être approché par la relation issue de la théorie de la ligne portante qui conduit à

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi}{1 + 2/\lambda}, \quad (4.20)$$

où λ est l'allongement de l'aile qui est donné par la relation

$$\lambda = \frac{b^2}{S}, \quad (4.21)$$

où b est l'envergure des ailes en m.

En substituant l'équation (4.20) dans l'équation (4.19), on obtient

$$C_L = \frac{2\pi}{1 + 2/\lambda} (\alpha - \alpha_0). \quad (4.22)$$

Les équations (4.18) et (4.22) donnent

$$\frac{2\pi}{1 + 2/\lambda} (\alpha - \alpha_0) = \frac{m g}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}. \quad (4.23)$$

Étant donné la masse, la vitesse et l'altitude de l'avion, on peut déduire l'angle d'incidence α de l'équation (4.23) de la relation suivante :

$$\alpha = \frac{m g (1 + 2/\lambda)}{\pi \rho V^2 S} + \alpha_0. \quad (4.24)$$

Pour calculer l'angle d'incidence, on doit déterminer α_0 . D'après Kermode (2006), la portance est nulle lorsque les forces ascendantes et descendantes qui agissent sur les ailes sont égales. Cette égalité des forces peut être représentée par l'égalité des coefficients de moments au bord d'attaque et au rebord arrière de l'aile de l'avion. À la figure 4.1, le diagramme de gauche illustre la distribution des forces ascendantes et descendantes en fonction de l'angle d'incidence α . Le graphe de droite représente les coefficients de moments au bord d'attaque et au rebord arrière en fonction de l'angle α . Ces deux graphiques montrent que la portance n'est pas nulle lorsque l'angle d'incidence est nul, c'est-à-dire lorsque $\alpha = 0$.

La courbe du coefficient de portance C_L en fonction de l'angle d'incidence est donnée dans plusieurs documents, dont Blake (2009) et Boiffier (2000). Cette courbe qui est représentée à

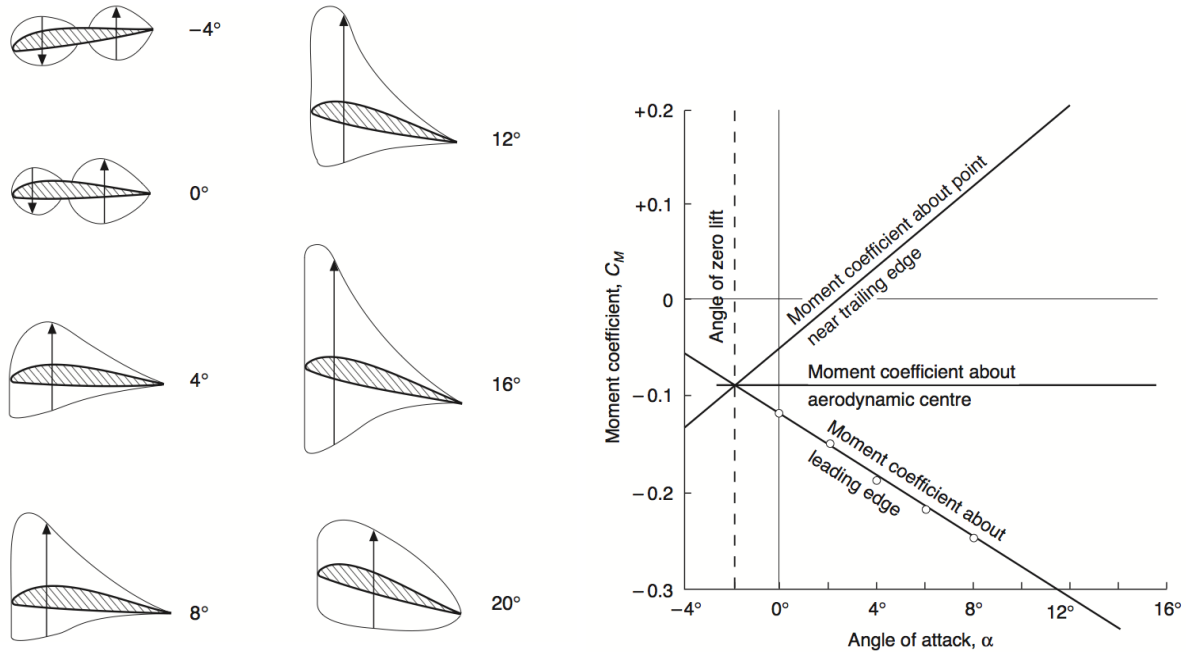


Figure 4.1 Schémas de la distribution de portance et graphe des coefficients de moments en fonction de l'angle d'incidence (tiré de Kermode (2006) figure 3.11, p. 76 et figure 3.18, p. 87).

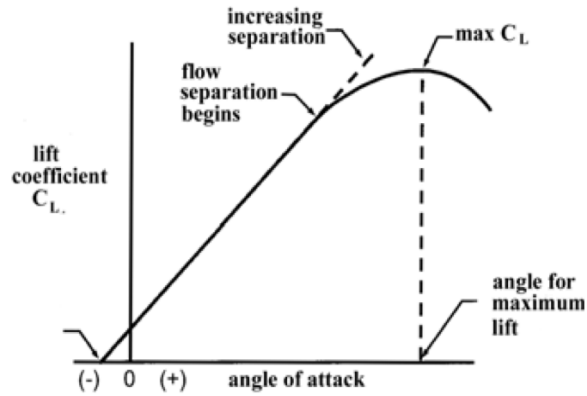


Figure 9-20

Figure 4.2 Coefficient de portance C_L en fonction de l'angle d'incidence (tiré de Blake (2009), figure 9-29 p. 9-17).

la figure 4.2 montre que l'angle α_0 est négatif. D'après Filippone (2008), à l'angle d'incidence $\alpha = 0$, le coefficient de portance satisfait $C_L = C_{L0} \approx 0,4$. Lorsque $\alpha = 0$, l'équation (4.19) devient

$$C_{L0} = -C_{L\alpha} \alpha_0.$$

On déduit alors que l'angle α_0 est donné par la relation

$$\alpha_0 = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}. \quad (4.25)$$

En substituant les équations (4.14) et (4.18) dans la première équation du système (4.13), on obtient

$$D = \left(C_{D0} \frac{1}{2} \rho V^2 S + C_{D2} \frac{m^2 g^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \right) (1 + C_{M16} M^{16}). \quad (4.26)$$

Puis en substituant l'équation (4.26) dans l'équation (4.12), on obtient

$$T \cos(\alpha) = \frac{mg}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt} + \left(C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \right) (1 + C_{M16} M^{16}). \quad (4.27)$$

Avec la poussée T déterminée par l'équation (4.27), le débit massique nominal de carburant en croisière FF_{nominal} est donné par

$$FF_{\text{nominal}} = \eta T, \quad (4.28)$$

avec

$$\eta = C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right). \quad (4.29)$$

Dans les cas de la décélération et de la descente, la poussée de l'avion peut être nulle ou proche de zéro. D'après Nuic (2009) (p. 25), si la poussée de l'avion est nulle, on utilise alors la fonction de débit massique minimal

$$FF_{\text{min}} = C_{f3} \left(1 - \frac{h}{C_{f4}} \right). \quad (4.30)$$

En phase de croisière, le débit massique est donné par

$$FF_{cr} = C_{fcr} \eta T, \quad (4.31)$$

où les variables utilisées dans les équations (4.28), (4.29), (4.30) et (4.31) sont définies au tableau 4.3. En substituant les équations (4.27) et (4.29) dans l'équation (4.31), on obtient le débit massique en phase de croisière

$$FF_{cr} = \frac{C_{fcr} \eta}{\cos(\alpha)} \left[\frac{mg}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt} + \left(C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \right) (1 + C_{M16} M^{16}) \right]. \quad (4.32)$$

D'après l'équation (4.32), si l'angle d'incidence α croît, alors le débit massique de carburant

Tableau 4.3 Définition des symboles des équations (4.29) et (4.31).

Symbole	Définition	Unité
FF_{cr}	débit massique de carburant en croisière	kg/s
η	consommation spécifique de carburant	kg s ⁻¹ N ⁻¹
C_{f1}	coefficient de carburant 1	kg s ⁻¹ N ⁻¹
C_{f2}	coefficient de carburant 2	m/s
C_{f3}	coefficient de carburant 3	kg/s
C_{f4}	coefficient de carburant 4	m
C_{fcr}	coefficient de correction du débit massique en croisière	sans unité

FF_{cr} croît aussi. Pour avoir une consommation minimale de carburant, on doit donc garder la valeur de α proche de zéro. Or, l'équation (4.24) montre que l'angle d'incidence α est une fonction de la masse m , de la vitesse V et de la masse volumique ρ qui est fonction de l'altitude h . Pour une masse m et une altitude h données, on peut déterminer la vitesse V qui minimise l'angle α et, par conséquent, qui minimise aussi la consommation instantanée de carburant.

Puisque la variation de masse de l'avion ne dépend que du carburant consommé, alors

$$\frac{dm}{dt} = -FF. \quad (4.33)$$

En utilisant l'équation (4.32), l'équation (4.33) prend la forme

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{C_{fcr}\eta}{\cos(\alpha)} \left[\frac{mg}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt} + \left(C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \right) (1 + C_{M16} M^{16}) \right]. \quad (4.34)$$

Cette dernière équation, qui est une équation différentielle du premier ordre pour $m(t)$, nous servira de base pour le calcul de la consommation de carburant.

4.1.3 Modèle atmosphérique

Pour résoudre l'équation (4.34), on a besoin de calculer la masse volumique de l'air ρ en fonction de l'altitude h . On utilise les équations qui sont résumées dans Nuic et al. (2005). Ces équations sont basées sur l'atmosphère normalisée de type OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale). Cette atmosphère normalisée est aussi notée ISA (pour *International Standard Atmosphere* en anglais). Cette atmosphère définit des conditions normales de température et de pression qui ne dépendent que de l'altitude.

La masse volumique de l'air ρ est donnée par la relation

$$\rho = \frac{p}{R T_e}, \quad (4.35)$$

où $R = 287,05287$ (en $J kg^{-1} K^{-1}$) est la constante spécifique de l'air sec, T_e est la température en Kelvin et p est la pression atmosphérique en Pascal à l'altitude h . Les calculs de T_e et de p dépendent de la position de l'avion par rapport à la tropopause. En fait, la température décroît linéairement en fonction de l'altitude sous la tropopause et est constante au-dessus jusqu'à une altitude d'environ 20 km. La pression atmosphérique ne varie pas de la même manière de part et d'autre de la tropopause. L'altitude de la tropopause $h_{\text{tropopause}}$ dépend de la différence de la température par rapport à la température ISA au niveau moyen de la mer qui est donnée par

$$\Delta T_{\text{ISA}} = T_0 - (T_0)_{\text{ISA}}, \quad (4.36)$$

où T_0 est la température ambiante et $(T_0)_{\text{ISA}} = 288,15$ K est la température ISA au niveau moyen de la mer. L'altitude de la tropopause est donnée par

$$h_{\text{tropopause}} = 11\,000 - \frac{\Delta T_{\text{ISA}}}{k_T}, \quad (4.37)$$

où $k_T = -0,0065$ est le gradient de la température ISA sous la tropopause.

On peut déterminer la température T_e et la pression p en fonction de l'altitude h comme suit :

— Si $h < h_{\text{tropopause}}$, alors

$$T_e = (T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}} + k_T h \quad (4.38)$$

et

$$p = (p_0)_{\text{ISA}} \left(\frac{T_e}{(T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}}} \right)^{-\frac{g}{k_T R}}, \quad (4.39)$$

où $(p_0)_{\text{ISA}} = 101\,325$ Pa est la pression ISA au niveau moyen de la mer ;

— Si $h = h_{\text{tropopause}}$, alors

$$T_{\text{tropopause}} = (T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}} + k_T h_{\text{tropopause}} = 216,65 \text{ K} \quad (4.40)$$

et

$$p_{\text{tropopause}} = (p_0)_{\text{ISA}} \left(\frac{T_{\text{tropopause}}}{(T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}}} \right)^{-\frac{g}{k_T R}}; \quad (4.41)$$

— Si $h > h_{\text{tropopause}}$, alors

$$T_e = T_{\text{tropopause}} \quad (4.42)$$

et

$$p = p_{\text{tropopause}} \exp \left\{ - \left(\frac{g}{R T_{\text{tropopause}}} \right) (h - h_{\text{tropopause}}) \right\}. \quad (4.43)$$

4.2 Vérification des résultats numériques

Dans cette sous-section, on présente certains résultats numériques de la résolution des équations de la sous-section précédente.

4.2.1 Calcul de la masse de l'avion en fonction du temps

On a utilisé un fichier de type *Operations Performance File* d'Eurocontrol ayant pour nom B763____.OPF, disponible sur le site internet d'Eurocontrol (BADA Team (2000b)), pour un avion Boeing de type B767-300ER équipé de deux moteurs de type PW4060. On a obtenu de ce dernier document les valeurs des constantes données au tableau 4.4.

Tableau 4.4 Tableau des constantes BADA pour le fichier B763____.OPF.

Constante	Valeur	Unité
C_{D0}	0,018	sans unité
C_{D2}	0,048	sans unité
C_{f1}	$1,318\,33 \times 10^{-5}$	$\text{kg s}^{-1} \text{N}^{-1}$
C_{f2}	1445,59	m/s
S	283,3	m^2
C_{M16}	0	sans unité
C_{fcr}	1,0347	sans unité

D'après un rapport de Boeing (2005), l'envergure des ailes de l'avion étudié est $b = 47,57$ m. En utilisant cette valeur de b , on obtient successivement les valeurs de λ , $C_{L\alpha}$ et de α_0 données au tableau 4.5. Dans le cas d'un vol à altitude et vitesse constantes ($h = 10\,058,4$ m et $V = 240$ m/s), on a $\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} = 0$ et $\rho = 0,409\,763$ kg/m³. L'équation (4.34) prend donc la forme simplifiée

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{C_{fcr} C_{f1}}{\cos(\alpha)} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) \left[\left(C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \right) \right]. \quad (4.44)$$

On a considéré une masse initiale $m_0 = 150\,000$ kg et on a résolu numériquement l'équation différentielle (4.44).

Tableau 4.5 Tableau des constantes pour le calcul de α .

Constante	Valeur	Unité
λ	7,987 66	sans unité
$C_{L\alpha}$	5,025	rad ⁻¹
α_0	-0,079 602 1	rad

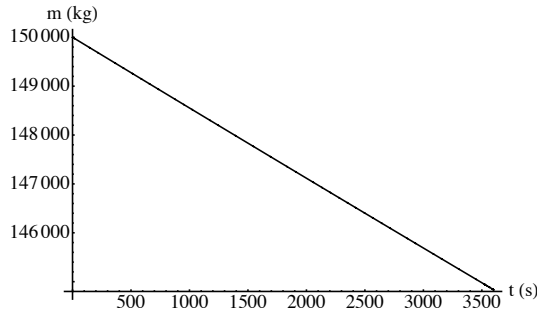
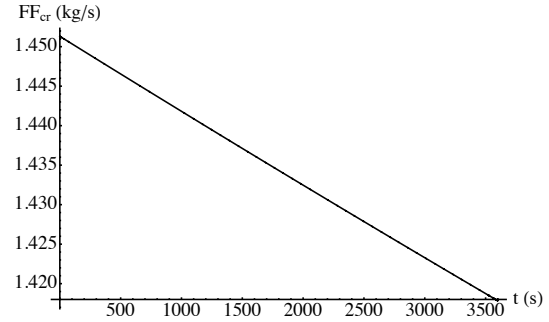
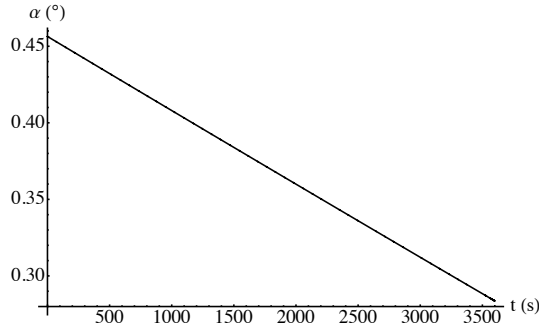
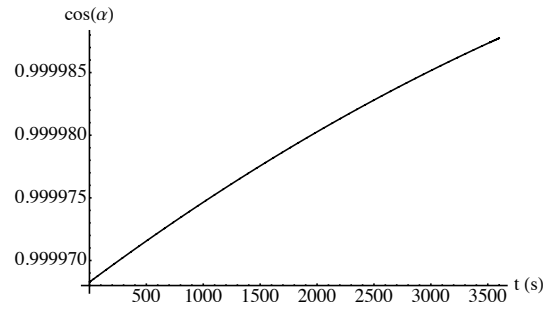
(a) graphe de $m(t)$.(b) graphe de $FF_{cr}(t)$.(c) graphe de $\alpha(t)$.(d) graphe de $\cos(\alpha(t))$.

Figure 4.3 Graphes de la masse $m(t)$, du débit massique de carburant FF_{cr} , de l'angle d'incidence $\alpha(t)$ et de $\cos(\alpha(t))$ de l'avion en régime de croisière à altitude et vitesse constantes ($h = 10\,058,4$ m, $V = 240$ m/s, $m_0 = 150\,000$ kg).

On a représenté le graphe de la masse de l'avion en fonction du temps pour une durée d'une heure (3600 secondes) à la figure 4.3(a) et le graphe du débit massique de carburant $FF_{cr} = -\frac{dm}{dt}$ en kg/s à la figure 4.3(b). Puisque la masse m diminue, alors le poids diminue et il faut donc réduire la portance pour rester à la même altitude. On réduit la portance en diminuant l'angle d'attaque, ce qui réduit les forces de friction et donc aussi la consommation.

On a représenté, à la figure 4.3(c), l'angle d'incidence $\alpha(t)$ calculé avec l'équation (4.24) et à la figure 4.3, la valeur de $\cos(\alpha(t))$ de l'avion en fonction du temps. Ces deux figures

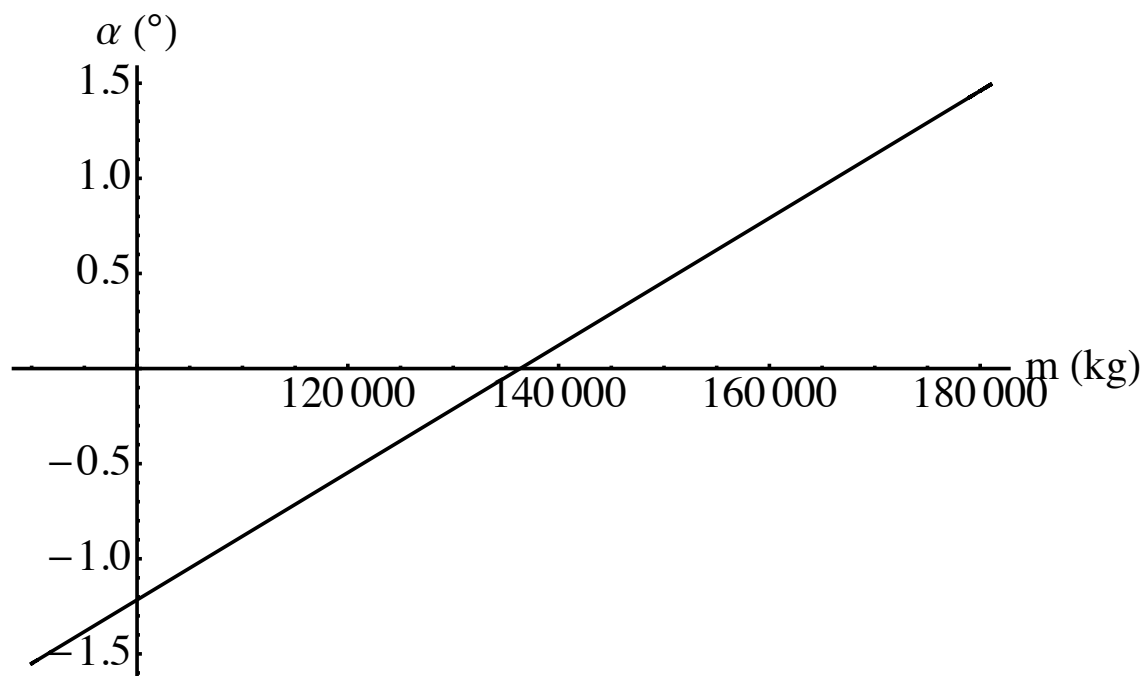


Figure 4.4 Graphe de l'angle d'incidence α en régime de croisière à altitude et vitesse constantes ($h = 10\,058,4$ m, $V = 240$ m/s) en fonction de la masse m .

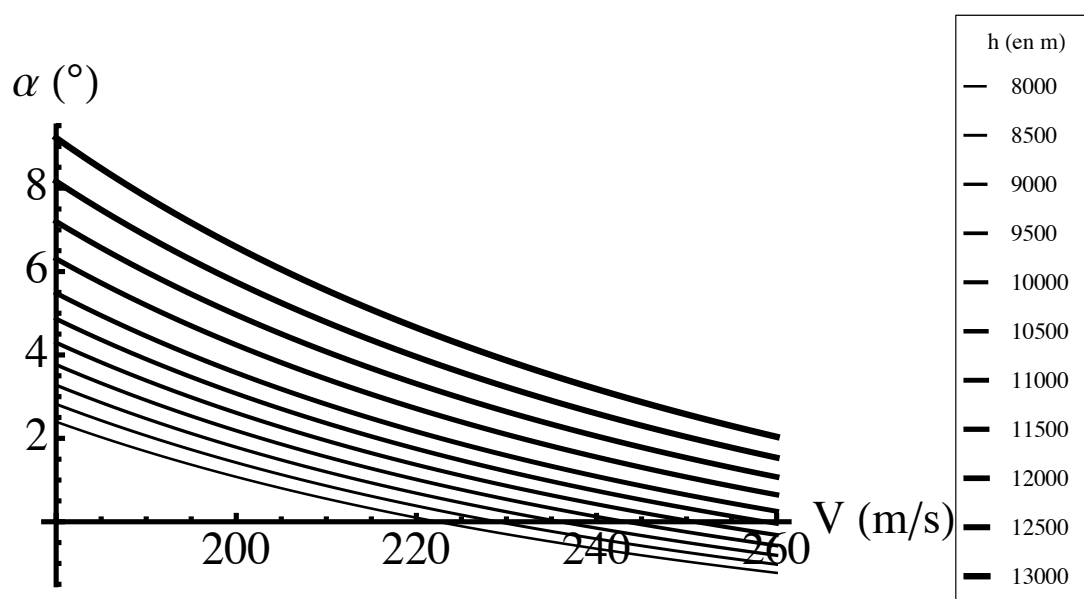


Figure 4.5 Graphes de l'angle d'incidence α en régime de croisière pour une masse de $m_0 = 150\,000$ kg pour différents niveaux d'altitudes en fonction de la vitesse V .

montrent que l'angle α décroît en fonction du temps, et donc en fonction de la masse. On remarque aussi que la valeur de $\cos(\alpha(t))$ est proche de 1.

Les figures 4.4 et 4.5 montrent la variation de l'angle d'incidence α en fonction de la masse de l'avion et en fonction de la vitesse pour différentes altitudes. À partir de ces graphiques, on peut remarquer qu'étant donné la masse de l'avion, on détermine conjointement l'altitude et la vitesse qui donnent un angle d'incidence nul ou presque. À la figure 4.5, on observe que pour $m_0 = 150\,000$ kg, on peut trouver une valeur de la vitesse afin d'obtenir un angle $\alpha = 0$ pour certaines altitudes. Si on veut que l'angle d'incidence soit presque nul, on doit donc éviter les hautes altitudes car même à la vitesse maximale de l'avion, cet angle reste grand.

4.2.2 Comparaison des valeurs calculées avec les valeurs tabulées du fichier B763____.PTF

On a comparé nos calculs numériques du débit massique de carburant avec les valeurs données par le fichier des tables de performance B763____.PTF, disponible sur le site internet d'Eurocontrol (BADA Team (2000a)). Le but de cette comparaison est de s'assurer que notre implémentation des équations ainsi que les unités utilisées sont correctes. On a programmé les fonctions en langage C et les résultats présentés sont des sorties du code. Comme on va utiliser ces fonctions pour la détermination de la trajectoire optimale, on doit s'assurer que les calculs de coûts ne contiennent pas d'erreurs d'implémentation.

Les fichiers des tables de performance PTF donnent les performances de l'avion pour différents niveaux d'altitudes. Ces fichiers sont composés principalement de trois tableaux pour chacune des phases de vol (croisière, montée et descente). On présente ici la comparaison avec le premier tableau qui donne les consommations de carburant en croisière. La comparaison des deux autres tableaux sera présentée au chapitre 6 où on étudie les phases de montée et de descente.

On a calculé le débit massique de carburant avec l'équation (4.44) pour des altitudes variant de 3000 pieds à 43 000 pieds en utilisant les vitesses données pour chacune de ces masses, soit :

- masse minimale : 107 880 kg ;
- masse nominale : 150 000 kg ;
- masse maximale : 181 400 kg.

Pour valider les calculs, on a représenté à la figure 4.6 les valeurs tabulées de FF_{cr} pour différentes altitudes et masses ainsi que les valeurs calculées. On remarque que les valeurs numériques se superposent avec les valeurs tabulées sauf pour les deux dernières valeurs qui correspondent à une masse maximale et aux altitudes de 39 000, 41 000 et 43 000 pieds. On a vérifié ces trois dernières valeurs et on a constaté que si on utilise la masse maximale à cette

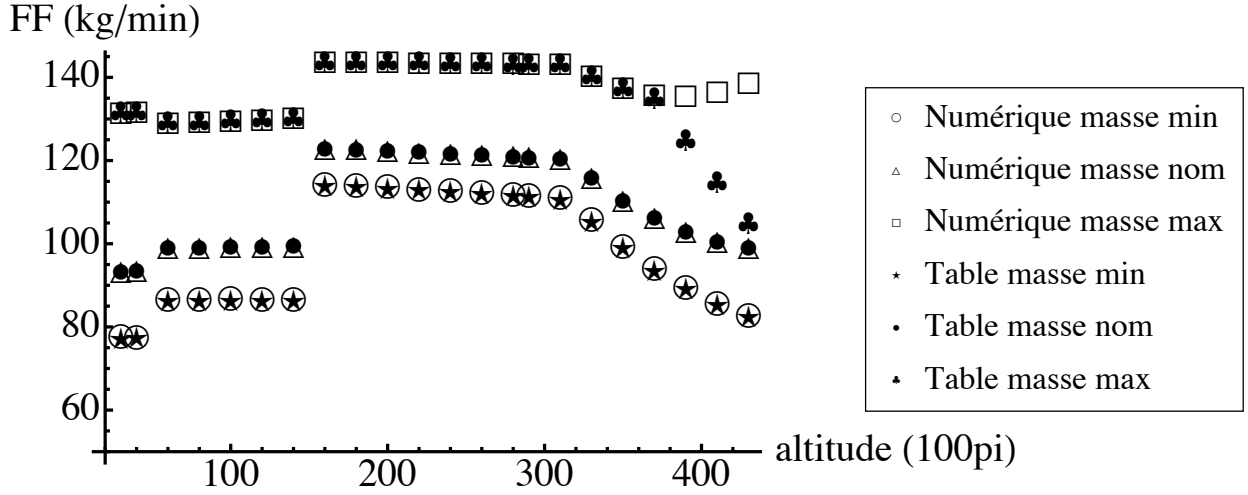


Figure 4.6 Graphe du débit massique de carburant en croisière FF_{cr} calculé numériquement et les valeurs tabulées du fichier B763____.PTF.

altitude et à cette vitesse, la poussée dépasse la poussée maximale de l'avion. Les calculs semblent donc corrects.

4.2.3 Calcul du coût de carburant pour une trajectoire rectiligne donnée

On examine ici un vol en ligne droite sur une distance de 396 km à altitude et vitesse constantes, où $h = 10\,058$ m. Si on veut effectuer ce vol en une durée de 1800 s (30 minutes), alors notre vitesse par rapport au sol doit être de $V_{Gr} = 220$ m/s. Si, durant ce vol, on a un vent de 80 nœuds = 41,16 m/s avec une orientation de 115° par rapport à la trajectoire du vol, alors la vitesse propre de l'avion est $\mathbf{V}_{TAS} = \mathbf{V}_{Gr} - \mathbf{V}_w$ (cf. figure 4.7), où \mathbf{V}_w est la vitesse du vent par rapport au sol. Si on représente les vitesses sous leur forme vectorielle, alors on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gr} = \begin{pmatrix} 220 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_w = \begin{pmatrix} -17,395 \\ 37,3036 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{V}_{TAS} = \mathbf{V}_{Gr} - \mathbf{V}_w = \begin{pmatrix} 237,395 \\ -37,3036 \end{pmatrix}.$$

La vitesse propre de l'avion est de 240,31 m/s avec une orientation de $-8,93^\circ$ par rapport à la trajectoire du vol. On suppose aussi que la masse de l'avion au point de départ est $m_0 = 150\,000$ kg.

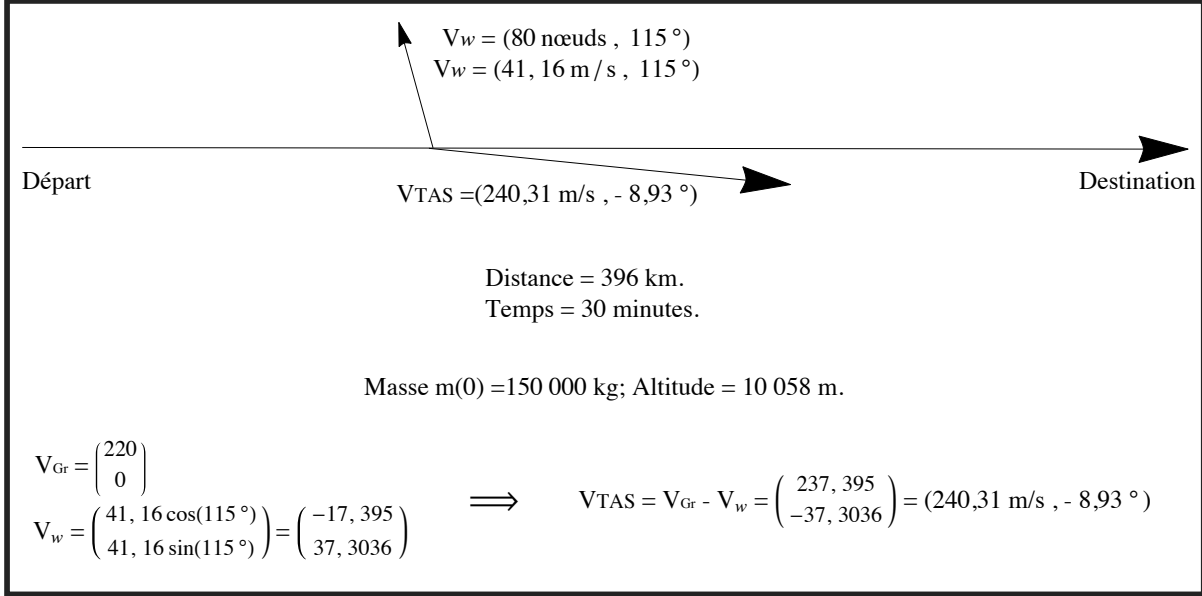


Figure 4.7 Schéma des vitesses au sol, du vent et par rapport à l'air entre deux points donnés.

La masse de l'avion pour ce trajet varie en fonction du temps selon l'équation (4.44), où $V = ||V_{TAS}||$, ce qui conduit à la solution analytique

$$m(t) = 182\,700 \tan[0,687\,427 - 4,483\,64 \times 10^{-6} t]. \quad (4.45)$$

Au point d'arrivée, à $t = 1800$ s, la masse de l'avion est $m(1800) = 147\,548$ kg. On déduit donc que le coût de carburant de ce trajet est $m(1800) - m(0) = 2452$ kg. On peut ainsi calculer la consommation de carburant pour une arête donnée.

4.3 Calcul des autres coûts

À part le coût de carburant, on doit calculer les autres coûts associés au vol. Ces autres coûts sont essentiellement le coût du temps et les coûts de survol des territoires aériens.

4.3.1 Calcul du coût du temps

Le coût du temps a plusieurs composantes :

- les coûts d'opération (utilisation de l'avion, salaires de l'équipage, etc). Ces coûts sont généralement linéaires sauf dans le cas où il y a dépassement du nombre d'heures de travail réglementaire des membres de l'équipage ;
- les coûts de retard qui sont aussi composés :
 - de la location de l'emplacement de l'avion à l'aéroport ;
 - du coût associé à l'insatisfaction des passagers (perte de clients futurs) ;
 - des coûts engendrés par les correspondances manquées ;
 - etc.

La détermination et l'utilisation de ces coûts ne sont pas évidentes. On a déjà mentionné qu'on utilise le paramètre appelé l'*indice du coût* (CI pour *cost index* en anglais) qui est défini comme étant le rapport du coût du temps par seconde sur le prix du carburant par kilogramme, c'est-à-dire

$$\text{CI (kg/s)} = \frac{\text{coût du temps par seconde (\$/s)}}{\text{prix d'un kilogramme de carburant (\$/kg)}}.$$

Le CI est additionné au débit massique de carburant $-dm/dt$ pour obtenir le coût total instantané en kilogramme de carburant par seconde. L'utilisation du coût du temps dans une même fonction avec le coût du carburant FF_{cr} est essentielle pour la détermination de la trajectoire optimale puisque le coût du temps est corrélé négativement avec le coût du carburant. Si on accélère, alors on réduit le coût du temps mais on augmente la consommation instantanée du carburant.

La trajectoire optimale est spécifiée en donnant la position de l'avion dans l'espace à tout instant t du vol. Pour déterminer cette trajectoire, on devrait utiliser une grille espace-temps en quatre dimensions (4D). Puisqu'on utilise le CI, cette grille se réduit à trois dimensions (3D). On utilise donc une grille 3D qui est moins coûteuse en mémoire et en temps de calcul, mais qui utilise le paramètre CI qui est une fonction du temps d'arrivée, discontinue et complexe à déterminer. En fait, cette fonction peut être approximée par une fonction en escalier (Fig. 4.8). La valeur du CI augmente si le retard augmente. La première marche qui correspond à un retard de 20 à 35 minutes représente le coût associé à la perte de clients insatisfaits et la deuxième marche représente les correspondances manquées qui engendrent des coûts supplémentaires pour la compagnie.

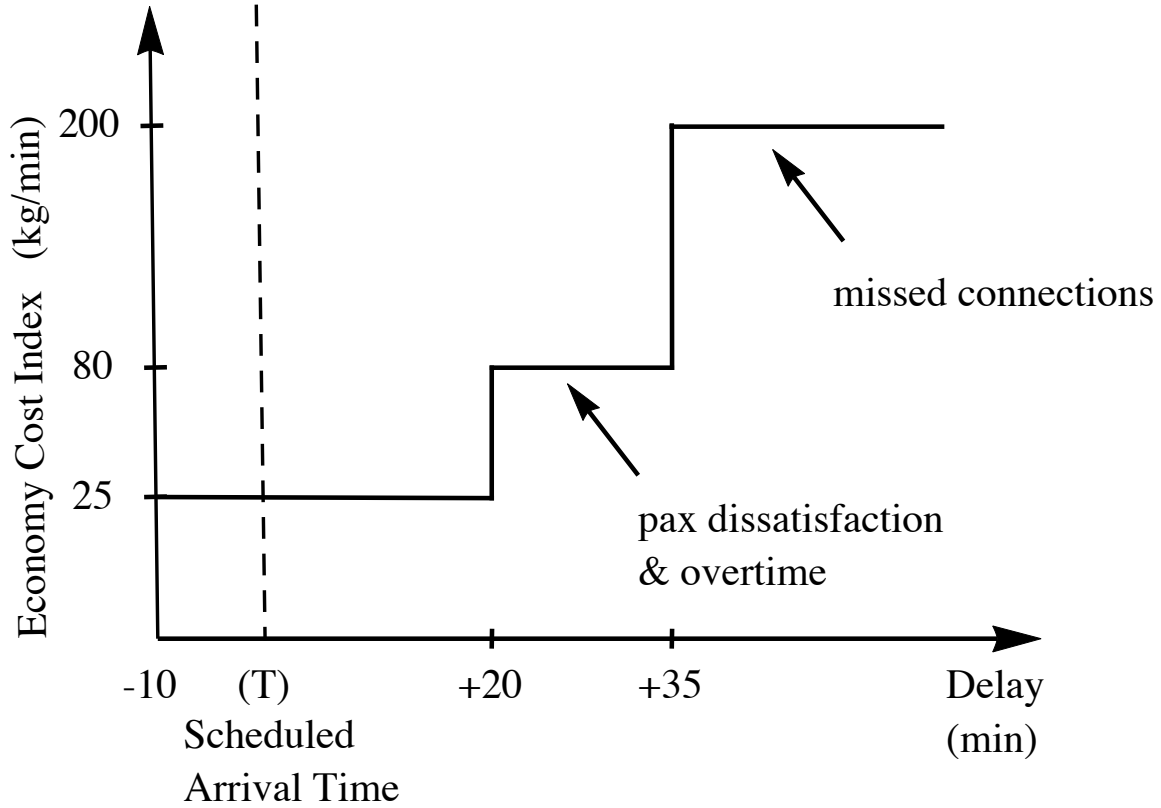


Figure 4.8 Approximation de l'indice du coût CI (tiré de Speyer (2006), p. 34)

4.3.2 Vitesse optimale

Si on note par $C(t)$ le coût total (carburant + temps) du vol à l'instant t , on peut alors définir le taux de variation instantané du coût total à l'instant t par

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{dm}{dt} + CI, \quad (4.46)$$

où $\frac{dm}{dt}$ est donné par l'équation (4.34).

On peut déterminer la vitesse qui minimise le taux de variation instantané de C . Cette vitesse n'est pas optimale puisqu'on ne connaît pas le temps nécessaire pour se rendre à destination. En fait, si dC/dt est minimal et que le temps nécessaire pour effectuer le vol est plus élevé, on peut alors avoir un coût total plus élevé. On utilise la distance spécifique (SR

pour *Specific Range* en anglais), qui est définie par

$$SR \text{ (m/kg)} := \frac{V \text{ (m/s)}}{dC/dt \text{ (kg/s)}}. \quad (4.47)$$

Pour une trajectoire spatiale fixe, le coût total est minimisé si SR est maximal en chaque point. La vitesse qui maximise SR est la vitesse dite optimale. On détermine pour chaque

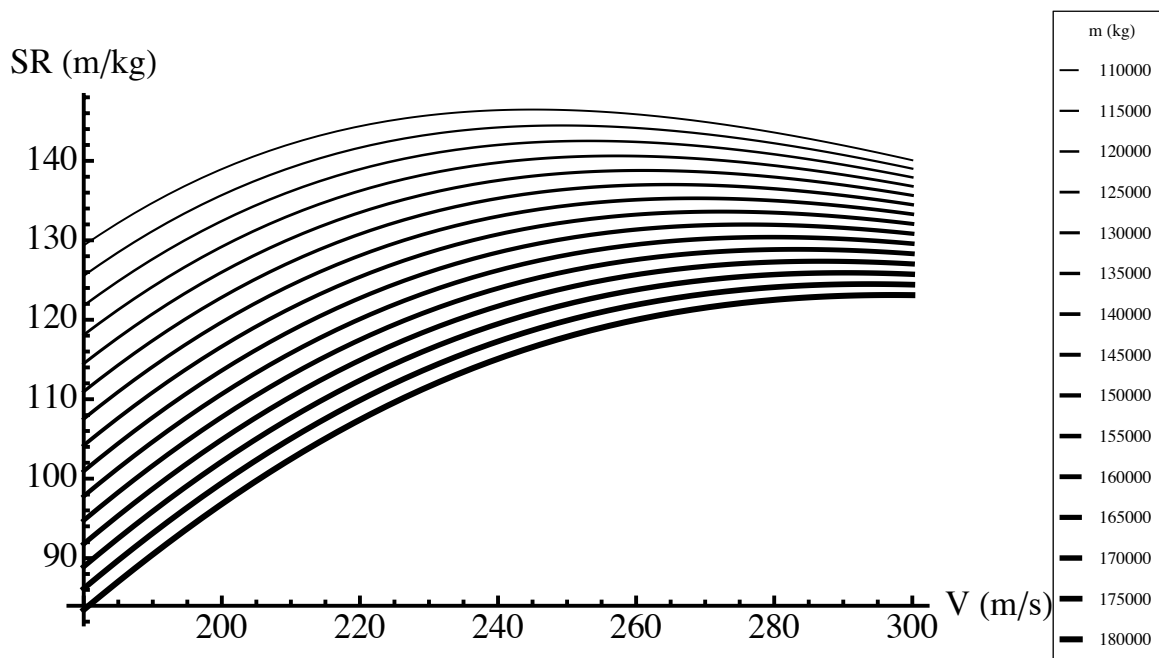


Figure 4.9 Graphes de la distance spécifique SR en fonction de la vitesse V pour différentes valeurs de la masse m .

arc de la grille la vitesse optimale en utilisant la masse et l'altitude de l'avion et l'indice du coût associé au vol. Ainsi, SR sera maximal pour chaque arc.

Pour étudier le comportement de SR en fonction de la vitesse V , on a représenté la courbe pour différents cas. À la figure 4.9, on a représenté SR en fonction de V en utilisant $CI = 25 \text{ kg/min}$, $h = 10\,058 \text{ m}$ et pour différentes valeurs de m dans l'intervalle $[110\,000 \text{ kg}, 180\,000 \text{ kg}]$. À la figure 4.10, on a représenté SR en fonction de V en utilisant $m = 150\,000 \text{ kg}$, $h = 10\,058 \text{ m}$ et pour différentes valeurs de CI dans l'intervalle $[10 \text{ kg/min}, 100 \text{ kg/min}]$. À la figure 4.11, on a représenté SR en fonction de V en utilisant $CI = 25 \text{ kg/min}$, $m = 150\,000 \text{ kg}$ et pour différentes valeurs de h dans l'intervalle $[7\,000 \text{ m}, 13\,000 \text{ m}]$. En analysant ces figures, on remarque que la courbe de SR en fonction de V a une forme quadratique et lisse. On utilise donc la méthode de Newton pour déterminer la valeur de V qui maximise SR. On a calculé les valeurs de l'angle d'incidence α

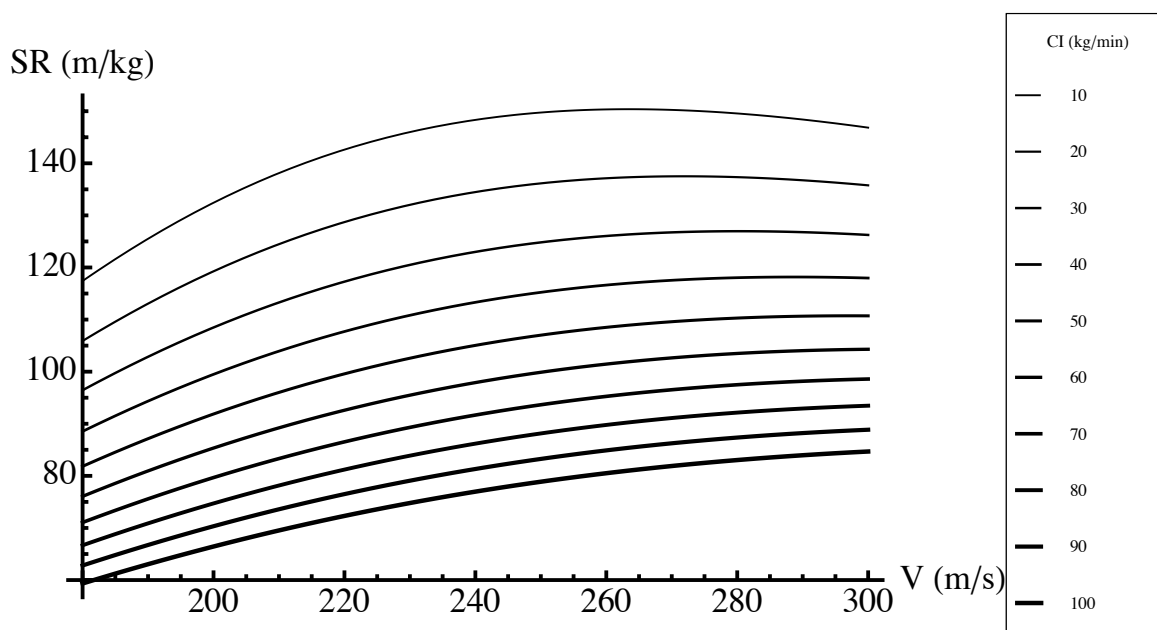


Figure 4.10 Graphes de la distance spécifique SR en fonction de la vitesse V pour différentes valeurs de l'indice du coût CI .

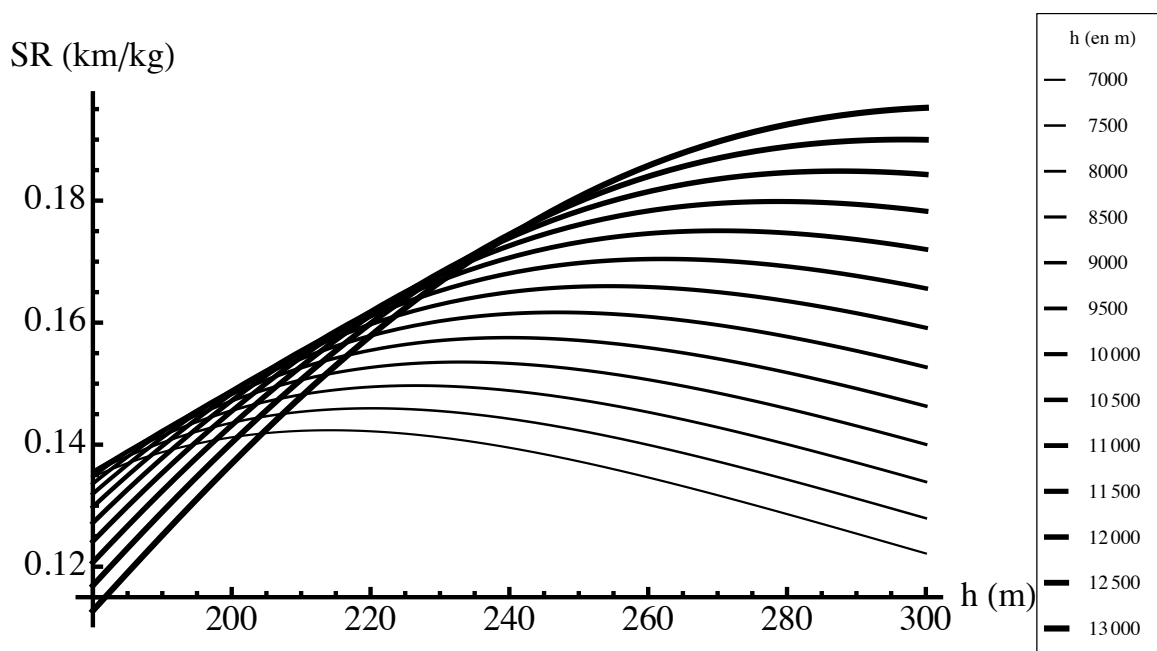


Figure 4.11 Graphes de la distance spécifique SR en fonction de la vitesse V pour différentes valeurs de l'altitude h .

pour les vitesses optimales dans les différents cas. On a trouvé $\cos(\alpha) > 0,999$. Si on utilise l'approximation $\cos(\alpha) \approx 1$, on aura alors une erreur relative inférieure à 0,1%.

Il faut choisir une valeur du CI applicable pour tout le vol et il faut que le temps d'arrivée soit dans l'intervalle choisi pour la valeur du CI. Puisque le CI dépend du temps d'arrivée, on utilise alors la méthode de tir pour déterminer le CI. Au départ, on considère la valeur du CI qui correspond à l'intervalle de temps d'arrivée prévu et on cherche le plus court chemin. Si le temps d'arrivée obtenu est inclus dans l'intervalle du CI choisi, alors on s'arrête et le chemin obtenu correspond à la trajectoire optimale. Sinon, on reprend le calcul en utilisant la valeur du CI qui correspond au temps d'arrivée obtenue à l'itération précédente et on cherche le plus court chemin. L'algorithme s'arrête lorsque le temps d'arrivée obtenu est inclus dans l'intervalle du CI utilisé.

4.3.3 Calcul du coût de survol des territoires aériens

Dans le cadre de cette thèse, on n'a pas considéré ce coût car on n'avait pas accès à toutes les données de chacun des pays. En fait, chaque pays dispose d'une formule spécifique pour le calcul de ce coût. Afin d'inclure ce coût dans les calculs, on devrait donner un coût fixe à chaque arc de la grille suivant sa position géographique et le temps nécessaire pour le parcourir. Ce coût devrait être implémenté au cours d'une prochaine phase du projet.

CHAPITRE 5

CALCUL DU COÛT D'UN ARC EN PHASE DE CROISIÈRE

Dans ce chapitre, on explique la méthode utilisée pour le calcul du coût de chaque arc qui relie deux nœuds voisins, disons N_1 et N_2 , dont les coordonnées sont respectivement (x_1, y_1, h_1) et (x_2, y_2, h_2) . Un arc représente la trajectoire de l'avion entre les points N_1 et N_2 . Cette trajectoire n'est pas rectiligne en général, mais sa projection dans le plan horizontal (x, y) est rectiligne. Comme on utilise des vitesses proches de la vitesse optimale et que pour ces vitesses $\cos(\alpha) \approx 1$, on a négligé l'angle d'incidence α pour alléger le texte et le calcul.

5.1 Équations différentielles générales

D'après les équations (4.27), (4.34) et (4.46), on peut calculer le coût d'un arc en résolvant le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} T &= \frac{m g}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{dt} &= -FF; \\ \frac{dC}{dt} &= CI - \frac{dm}{dt}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour résoudre ce système, on doit connaître le temps nécessaire pour parcourir l'arc. En fait, si la masse de l'avion est m_1 au nœud N_1 et s'il faut $t_{1,2}$ secondes pour parcourir l'arc, alors on obtient la masse m_2 de l'avion au nœud N_2 et le coût total C de l'arc en calculant :

$$\begin{cases} m_2 &= m_1 + \int_0^{t_{1,2}} \frac{dm}{dt} dt; \\ C &= CI \cdot t_{1,2} + (m_2 - m_1). \end{cases} \quad (5.2)$$

Les équations différentielles (5.1) font intervenir le temps comme variable indépendante. En général, le temps requis pour parcourir un arc n'est pas connu a priori. Cependant, la distance horizontale à parcourir sur un arc est toujours connue à l'avance, car elle est déterminée par la position des nœuds N_1 et N_2 .

Pour obtenir des équations différentielles ayant des conditions aux frontières fixes et connues d'avance, nous proposons de faire un changement de variable pour utiliser la distance u parcourue à l'horizontal entre N_1 et N_2 comme variable indépendante, au lieu du temps. Pour chaque arc, la variable u varie entre 0 et $U := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ et est telle que

$$\frac{du}{dt} > 0.$$

Ce changement de variable permet d'utiliser pour chaque arc les mêmes conditions aux frontières, qui sont alors données par

$$x(0) = x_1, \quad y(0) = y_1, \quad h(0) = h_1,$$

et

$$x(U) = x_2, \quad y(U) = y_2, \quad h(U) = h_2.$$

Dans la suite, ces conditions aux frontières fixes faciliteront la discrétisation des équations différentielles, qui est nécessaire pour obtenir les approximations numériques.

5.1.1 Changement de variable

Soit s la coordonnée curviligne mesurant la distance parcourue par l'avion au temps t sur sa trajectoire à partir du nœud N_1 . Si on exprime s en fonction de u et de h , où u est la distance parcourue dans la direction horizontale à partir de N_1 et h est l'altitude, alors

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{du} \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (5.3)$$

Or $\frac{ds}{dt} = V_G$, où V_G est la vitesse de l'avion par rapport au sol et $ds = \sqrt{du^2 + dh^2}$. L'équation (5.3) prend donc la forme

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{du} \frac{V_G}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{du}\right)^2}} \quad (5.4)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{dm}{du} = \frac{dm}{dt} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{du}\right)^2}}{V_G}. \quad (5.5)$$

On peut calculer V_G à partir de la vitesse de l'avion par rapport à l'air V et la vitesse du vent \mathbf{V}_w par rapport au sol en utilisant la relation

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_G - \mathbf{V}_w. \quad (5.6)$$

L'équation (5.6) implique

$$\begin{aligned}
 V^2 &= (\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_w) \cdot (\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_w) \\
 &= V_G^2 + V_w^2 - 2 \mathbf{V}_G \cdot \mathbf{V}_w \\
 &= V_G^2 + V_w^2 - 2 V_G V_w \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs \mathbf{V}_G et \mathbf{V}_w , dont nous allons maintenant déterminer le cosinus.

Soit \mathbf{r} le vecteur position de l'avion, qui est donné par

$$\mathbf{r}(u) = \left(x(u), y(u), h(u) \right)^T.$$

Le vecteur vitesse \mathbf{V}_G est défini par

$$\mathbf{V}_G = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{du} \frac{du}{dt} \propto \frac{d\mathbf{r}}{du} =: \mathbf{e}_G, \tag{5.8}$$

où \mathbf{e}_G est un vecteur qui a la même direction que \mathbf{V}_G car on suppose toujours que $du/dt > 0$.

Puisque la projection de la trajectoire de l'avion dans le plan (x, y) est rectiligne, la trajectoire dans ce plan peut être décrite par la paramétrisation :

$$\begin{cases} x(u) = x_1 + \cos(\theta_1) u; \\ y(u) = y_1 + \sin(\theta_1) u; \\ 0 \leq u \leq U, \end{cases} \tag{5.9}$$

où θ_1 est l'angle entre la projection du vecteur $\overrightarrow{N_1 N_2}$ dans le plan horizontal et l'axe des x , donné par

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{x_2 - x_1}{U}; \\ \sin(\theta_1) = \frac{y_2 - y_1}{U}. \end{cases}$$

En utilisant la paramétrisation (5.9), la définition (5.8) conduit à

$$\mathbf{e}_G = \left(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1), h'(u) \right)^T.$$

L'angle θ entre \mathbf{V}_w et \mathbf{V}_G satisfait

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{e}_G \cdot \mathbf{V}_w}{\|\mathbf{e}_G\| \|\mathbf{V}_w\|}.$$

Comme $\mathbf{V}_w = (V_{w,x}, V_{w,y}, 0)^T$, c'est à dire que la composante verticale du vent est supposée nulle (ou négligeable), on obtient

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{1 + (dh/du)^2} \sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}. \quad (5.10)$$

D'après l'équation (5.7), V_G est une solution de l'équation de second degré

$$V_G^2 - 2 V_G V_w \cos \theta + V_w^2 - V^2 = 0. \quad (5.11)$$

Comme $V_w < V$, cette équation admet deux solutions réelles données par

$$V_G = V_w \cos \theta \pm \sqrt{V^2 - V_w^2 \sin^2 \theta}. \quad (5.12)$$

On sait que $V > 2 V_w$, ($V_w \leq 80$ m/s, alors que $V \geq 170$ m/s), ce qui implique :

$$\begin{aligned} V^2 &> 4 V_w^2 \\ \implies \sqrt{V^2 - V_w^2 \sin^2 \theta} &> V_w \sqrt{4 - \sin^2 \theta} > V_w \cos(\theta) \\ \implies V_w \cos \theta - \sqrt{V^2 - V_w^2 \sin^2 \theta} &< 0, \end{aligned}$$

et donc la solution (5.12) avec le signe « $-$ » est à rejeter car $V_G > 0$. La solution de l'équation (5.11) est donc :

$$V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))},$$

qui est entièrement déterminée par l'expression (5.10).

De même, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{du} \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dV}{du} \frac{V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\implies \frac{dV}{du} = \frac{dV}{dt} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G}, \quad (5.14)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= V_G \frac{dh}{\sqrt{du^2 + dh^2}} \\ &= \frac{dh}{du} \frac{V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{du} = \frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}. \quad (5.16)$$

En utilisant ce changement de variables, le système (5.1) prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{m g (dh/du)}{V \sqrt{V_G^2 + (dh/du)^2}} + \frac{dV}{du} \frac{m V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \frac{dm}{dt}; \\ \frac{dC}{du} = \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \left[\text{CI} - \frac{dm}{dt} \right]. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Puisque ce système dépend des valeurs de $\frac{dh}{du}$ et de $\frac{dV}{du}$ et que ces dernières dépendent de V_G et de $\cos(\theta)$, on doit alors ajouter ces termes au système (5.17). On obtient donc les équations générales que nous utiliserons pour le calcul du coût sur chaque arc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{1 + (dh/du)^2} \sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; \\ V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = \frac{(dh/dt)}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}} =: f_h; \\ \frac{dV}{du} = \frac{dV}{dt} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} =: f_V; \\ T = \frac{m g (dh/du)}{V \sqrt{V_G^2 + (dh/du)^2}} + \frac{dV}{du} \frac{m V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \frac{dm}{dt} =: f_m; \\ \frac{dC}{du} = \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \left[\text{CI} - \frac{dm}{dt} \right] =: f_C. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Pour que ce système soit complet, il faut spécifier les expressions de dh/dt , dV/dt et dm/dt , qui dépendent de la phase du vol.

5.1.2 Phase de croisière : expressions de f_V et de f_h pour chaque état du vol

D'après le document *Flight Operations Support & Line Assistance* (2002) (p. 155), en haute altitude, un rapport constant entre la vitesse propre V et la vitesse du son devrait être maintenu pour éviter les vibrations à grande vitesse (*buffeting* en anglais) durant un changement d'altitude. En d'autres mots, le changement d'altitude se fait en utilisant un nombre de Mach constant, où le nombre de Mach représente le rapport entre la vitesse propre de l'avion et la vitesse du son dans l'air. Il y a donc cinq états possibles pour l'avion en croisière :

- montée à un nombre de Mach constant ;
- descente à un nombre de Mach constant ;
- accélération à altitude constante ;
- décélération à altitude constante ;
- vitesse et altitude constantes.

L'expression des fonctions f_V et f_h pour chacun des cinq états possibles de l'avion en croisière est résumée au tableau 5.1 et est décrite comme suit :

- Si le vol est en état d'altitude et de vitesse constantes, alors $f_V = 0$ et $f_h = 0$;
- Si le vol est en état de changement de vitesse à altitude constante alors $f_h = 0$ et d'après l'équation (5.14),

$$f_V = \frac{dV/dt}{V_G};$$

- Si le vol est en état de changement d'altitude à un nombre de Mach constant, alors f_h est donnée par l'équation (5.16). D'après Nuic (2009) (p. 11), la vitesse V est une fonction de M et de l'altitude h définie par

$$V = M\sqrt{\gamma R T_e}, \quad (5.19)$$

où $\gamma = 1,4$ est l'indice adiabatique de l'air et T_e est la température de l'air qui est une fonction de l'altitude h et de la différence de température par rapport à la température au niveau moyen de la mer ΔT_{ISA} . D'après les expressions (4.38) et (4.42), la température T_e est donnée par la relation

$$T_e = \begin{cases} (T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}} + k_T h(u) & \text{si } h < h_{\text{tropopause}}; \\ (T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}} + k_T h_{\text{tropopause}} & \text{si } h \geq h_{\text{tropopause}}. \end{cases} \quad (5.20)$$

En substituant l'expression (5.20) dans (5.19), on obtient

$$V(u) = \begin{cases} M \sqrt{\gamma R (T_0 + \Delta T_{\text{ISA}} + k_t h(u))} & \text{si } h < h_{\text{tropopause}}; \\ M \sqrt{\gamma R (T_0 + \Delta T_{\text{ISA}} + k_t h_{\text{tropopause}})} & \text{si } h \geq h_{\text{tropopause}}. \end{cases} \quad (5.21)$$

En dérivant l'équation (5.21) par rapport à u , on obtient

$$f_V = \begin{cases} \frac{M^2}{2V} \gamma R k_t \frac{dh}{du} & \text{si } h < h_{\text{tropopause}}; \\ 0 & \text{si } h \geq h_{\text{tropopause}}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Tableau 5.1 Détermination des fonctions f_h et f_V suivant l'état du vol.

État du vol	f_V	f_h
Vitesse et altitude constantes	0	0
Changement de vitesse à altitude constante	$\frac{dV/dt}{V_G}$	0
Montée à M constant, $h < h_{\text{tropopause}}$	$\frac{M^2}{2V} \gamma R k_T \frac{dh}{du}$	$\frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}$
Montée à M constant, $h \geq h_{\text{tropopause}}$	0	$\frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}$
Descente à M constant, $h < h_{\text{tropopause}}$	$\frac{M^2}{2V} \gamma R k_T \frac{dh}{du}$	$\frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}$
Descente à M constant, $h \geq h_{\text{tropopause}}$	0	$\frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}$

5.1.3 Détermination de $\frac{dh}{dt}$ en fonction de la phase de vol

D'après Nuic (2009) (p. 8), si on utilise

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

dans l'équation (4.10) et en utilisant $\cos(\alpha) \approx 1$, on obtient

$$(T - D)V = m V \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} + m g \frac{dh}{dt}. \quad (5.23)$$

À partir de l'équation (5.23), on peut déduire que

$$\frac{(T - D)V}{m g} = \frac{dh}{dt} \left[\frac{V}{g} \frac{dV}{dh} + 1 \right]. \quad (5.24)$$

L'équation (5.24) implique que

$$\frac{dh}{dt} = \left[\frac{(T_{\max} - D)V}{m g} \right] ESF(M), \quad (5.25)$$

où T_{\max} est la poussée maximale de l'avion et

$$ESF(M) := \left[\frac{V}{g} \frac{dV}{dh} + 1 \right]^{-1}$$

désigne le facteur de partage de l'énergie (*Energy Share Factor* en anglais) en énergie cinétique (changement de vitesse) et potentielle (changement d'altitude). Le facteur $ESF(M)$ dépend de $\frac{dV}{dh}$, et lorsque le changement d'altitude se fait à un nombre de Mach M constant, la variation de la vitesse en fonction de l'altitude peut être déterminée en fonction de M .

D'après Nuic (2009) (p. 9), la fonction de partage de l'énergie $ESF(M)$ dépend des conditions de vol comme suit :

$$ESF(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } h \geq h_{\text{tropopause}}; \\ \left[1 + \frac{\gamma R k_T}{2g} M^2 \right]^{-1} & \text{si } h < h_{\text{tropopause}}. \end{cases} \quad (5.26)$$

La poussée maximale T_{\max} dépend du type de moteur (jet, turbo ou piston), de l'altitude au-dessus du niveau de la mer, de la vitesse propre de l'avion et de la différence de température par rapport au standard atmosphérique ΔT_{ISA} .

Pour un avion de type jet et sous les conditions atmosphériques standard (ISA), la poussée maximale T_{\max} dépend aussi de la phase du vol. L'expression de T_{\max} pour chacune des phases de vol est donnée dans le rapport Nuic (2009) et est résumée au tableau 5.2. Les constantes $C_{Tc,1}, C_{Tc,2}, C_{Tc,3}, C_{Tc,4}, C_{Tc,5}, C_{Tcr}, C_{Tdes, \text{high}}$ et $C_{Tdes, \text{low}}$ sont données par les fichiers BADA pour chaque type d'avion.

5.1.4 Détermination de $\frac{dV}{dt}$ pour un changement de vitesse à altitude constante en phase de croisière

D'après le témoignage de M. Robert Couillard, ingénieur chez Air Canada, lors d'un changement de vitesse à altitude constante, on doit utiliser la poussée maximale sans dépasser l'accélération maximale permise. Un des objectifs de ce projet est de donner une trajectoire optimale en respectant toutes les règles de navigation. Cette trajectoire devrait respecter les manœuvres que les pilotes peuvent exécuter dans le cockpit, décrites par M. Couillard. On a aussi calculé les coûts d'un arc en utilisant différentes valeurs d'accélération et on a constaté que l'accélération maximale donne le coût minimal. D'après Nuic (2009) (p. 33),

Tableau 5.2 Détermination de T_{\max} suivant la phase du vol.

Phase	T_{\max}
Décollage ou montée (ISA)	$(T_{\max \text{ climb}})_{ISA} = C_{Tc,1} \left(1 - \frac{h}{C_{Tc,2}} + C_{Tc,3} h^2\right)$
Décollage ou montée	$T_{\max \text{ climb}} = (T_{\max \text{ climb}})_{ISA} \left(1 - C_{Tc,5} (\Delta T_{ISA})_{\text{eff}}\right)$ où $(\Delta T_{ISA})_{\text{eff}} = \Delta T_{ISA} - C_{Tc,4}$, en respectant $0,0 \leq (\Delta T_{ISA})_{\text{eff}} \times C_{Tc,5} \leq 0,4$ et $C_{Tc,5} \geq 0,0$
Croisière	$T_{\max \text{ cruise}} = C_{Tcr} (T_{\max \text{ climb}})$
Descente ($h > h_{des}$)	$T_{\max, \text{ des, high}} = C_{Tdes, \text{ high}} (T_{\max \text{ climb}})$
Descente ($h \leq h_{des}$)	$T_{\max, \text{ des, low}} = C_{Tdes, \text{ low}} (T_{\max \text{ climb}})$

l'accélération maximale permise pour les avions civils est de $2 \text{ pi/s}^2 \approx 0,6096 \text{ m/s}^2$, et ce sans dépasser la poussée maximale de l'avion T_{\max} .

Dans le cas d'une accélération, toute l'énergie disponible est utilisée pour le changement de vitesse en respectant l'accélération maximale permise. On utilise donc

$$\frac{dV}{dt} = \min \left\{ 0,6096; \frac{T_{\max} - D}{m} \right\}. \quad (5.27)$$

Dans le cas d'une décélération, on utilise une poussée nulle en respectant l'accélération maximale permise. On utilise donc

$$\frac{dV}{dt} = \max \left\{ -0,6096; -\frac{D}{m} \right\}. \quad (5.28)$$

5.1.5 Détermination de $\frac{dm}{dt}$ en phase de croisière

Pour les étapes de décélération et de descente, on utilise

$$\frac{dm}{dt} = -\max\{FF_{\min}, FF_{cr}\}, \quad (5.29)$$

où FF_{cr} est donné par l'équation (4.32) et FF_{\min} est donné par l'équation (4.30). Pour les autres étapes, on utilise

$$\frac{dm}{dt} = -FF_{cr}. \quad (5.30)$$

5.2 Description générale de l'algorithme du calcul à rebours du coût d'un arc complet

Comme la masse de l'avion n'est connue qu'à l'arrivée, et qu'on détermine le plus court chemin par un calcul à rebours, on doit alors effectuer le calcul du coût d'un arc aussi à rebours. On veut déterminer le coût optimal d'un arc qui relie les nœuds N_1 et N_2 . La direction du vol de l'avion est du nœud N_1 vers le nœud N_2 . Puisqu'on fait le calcul à rebours, on doit calculer le coût de l'arc du nœud N_2 vers le nœud N_1 . On suppose qu'au préalable on a déterminé la trajectoire reliant le nœud N_2 au point d'arrivée de la trajectoire. À ce stade, on connaît la masse, l'altitude et la vitesse de l'avion au nœud N_2 qui correspondent à des valeurs optimales pour ce nœud. On doit déterminer la vitesse, l'altitude et la masse de l'avion en tout point de la trajectoire reliant N_1 et N_2 . Si $h_1 \neq h_2$ et si cet arc appartient à la trajectoire optimale, alors h_1 est l'altitude optimale et le vol qui précède ce point est optimal à cette altitude. On détermine donc la vitesse optimale à l'altitude h_1 et à la masse m_2 car la masse m_1 est inconnue. On utilise ici la valeur m_2 comme approximation de la valeur de m_1 . Dans le cadre de ce travail, les longueurs des arcs utilisés ne sont pas grandes et la consommation de carburant sur chaque arc ne devrait pas avoir un effet significatif sur la détermination de la vitesse optimale. À la figure 4.9, on remarque qu'avec des différences de masses de cinq tonnes, la vitesse optimale ne varie pas trop. On remarque aussi que les courbes de SR forment des plateaux lisses autour du point maximum, ce qui implique que l'erreur encourue lorsqu'on utilise m_2 devrait être négligeable.

On doit déterminer la vitesse V_1 et le nombre de Mach M_1 associés à V_1 à l'altitude h_1 . Puisque V_1 est la vitesse optimale pour parcourir cet arc, la première étape du calcul consiste à faire un changement de vitesse. Si $h_1 \neq h_2$, la deuxième étape du calcul doit alors être un changement d'altitude. La troisième étape du calcul se fait à altitude h_1 et à vitesse V_1 constantes. À la figure 5.1, on a illustré différentes étapes de calcul d'un arc en phase de croisière avec les trois étapes.

Nous avons comme données :

- les coordonnées (x_1, y_1, h_1) du nœud N_1 ;
- les coordonnées (x_2, y_2, h_2) du nœud N_2 ;
- la masse m_2 de l'avion au nœud N_2 , qui est la masse donnée par l'arc précédent ;
- la vitesse propre V_2 de l'avion au nœud N_2 , qui est donnée par l'arc précédent ;

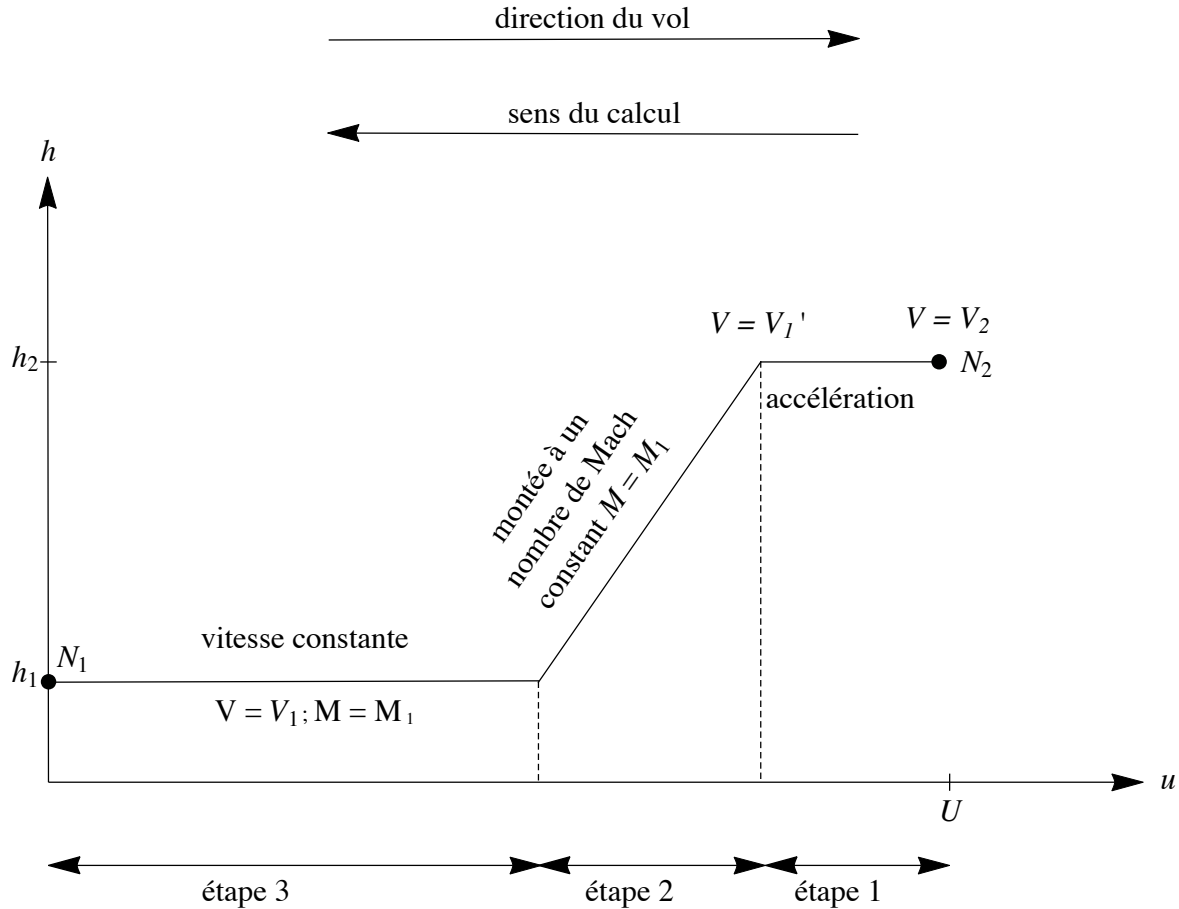


Figure 5.1 Illustration des étapes de calcul d'un arc typique en phase de croisière.

— les données de la météo pour cet arc (les composantes de la vitesse du vent et ΔT_{ISA}).

Nous devons déterminer les quantités suivantes :

- la vitesse propre V_1 , de l'avion au nœud N_1 , qui est la vitesse optimale pour parcourir l'arc ;
- la vitesse, l'altitude et la masse de l'avion en tout point de l'arc ;
- la masse m_1 de l'avion au nœud N_1 ;
- le coût total de l'arc $C(N_2) - C(N_1)$ ainsi que le temps t nécessaire pour parcourir l'arc.

La détermination de ces quantités passe par les étapes suivantes :

1. Calculs préliminaires :

calcul de la vitesse optimale pour l'arc : on calcule la vitesse V_1 , qui est la vitesse optimale à l'altitude h_1 , en utilisant la masse m_2 et la valeur de CI. Cette vitesse est celle qui maximise la distance spécifique, qui est donnée par l'équation (4.47). Dans le cas où la vitesse du vent est non nulle, on doit utiliser V_G au lieu de

V car la distance parcourue dépend de la vitesse du vent. On utilise alors plutôt

$$SR = \frac{V_G}{dC/dt}; \quad (5.31)$$

détermination du nombre de Mach pour le changement d'altitude : en utilisant l'équation (5.19), on détermine le nombre de Mach M_1 qui correspond à la vitesse optimale V_1 ;

détermination de la vitesse V'_1 : si $h_1 \neq h_2$, on calcule alors la vitesse V'_1 qui correspond au nombre de Mach M_1 à l'altitude h_2 car le changement d'altitude doit se faire à Mach constant $M = M_1$. Sinon, la vitesse V'_1 prend la valeur de V_1 ;

calcul de U : on calcule la distance horizontale entre N_1 et N_2 qui est donnée par $U = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

choix des tailles des pas : pour parcourir cette distance, on utilisera trois tailles de pas distinctes notées *pas-cst*, *pas-acc* et *pas-alt*. Elles seront utilisées comme suit :

- *pas-cst* = 20 000 m, lorsque la vitesse et l'altitude sont constantes ;
- *pas-acc* = 1000 m, lorsque l'altitude est constante et la vitesse est variable ;
- *pas-alt* = 1000 m, lorsqu'on a un changement d'altitude.

Le choix de ces tailles de pas sera discuté à la section 5.4 ;

initialisation des variables : on initialise les variables du nœud N_2 comme suit :

- $m = m_2$;
- $V = V_2$;
- $h = h_2$;
- $C = 0$;
- $u = U$;

2. Le calcul sur un arc est composé de trois étapes dans l'ordre suivant :

- première étape (ajustement de la vitesse) :
 - si $V = V'_1$ et $h = h_2$, alors on passe à la seconde étape ;
 - si $V \neq V'_1$ et $h = h_2$, alors on accélère ou on décélère jusqu'à ce que V soit égal à V'_1 . L'égalité $V = V'_1$ est toujours obtenue à la fin de la première étape ;
- seconde étape (ajustement de l'altitude) :
 - si $h = h_1$, alors on passe à la troisième étape ;
 - si $h \neq h_1$, alors on monte ou on descend à un nombre de Mach constant $M = M_1$ jusqu'à ce que h soit égal à h_1 . L'égalité $h = h_1$ est toujours obtenue à la fin de la seconde étape ;

— Troisième étape (déplacement à altitude et vitesse constantes) :

- à ce point-ci, $h = h_1$ et $V = V_1$;
- on vole à altitude constante jusqu'à ce que le point N_1 soit atteint.

On choisit le pas approprié à chacune des étapes du vol sur un arc. On détermine les valeurs de V, h, m et C à la fin de chaque pas en résolvant le système d'équations différentielles approprié. Pour la discrétisation de ce système, on utilise la méthode de *Runge-Kutta* d'ordre quatre (RK-4).

Le premier point est traité une fois au début de l'arc. Le deuxième point est à la base des calculs. On parcourt l'arc en utilisant la variable u . En fonction de l'étape de vol, on choisit la taille appropriée du pas ainsi que le système d'équations à résoudre à l'aide de la méthode RK-4. À la fin de chaque évaluation, on met à jour la valeur de u , c'est à dire $u \leftarrow u + \text{pas}$. On répète cette procédure jusqu'à l'obtention de $u = 0$. On utilise un pas négatif car le calcul se fait à rebours. On présente dans ce qui suit la démarche utilisée pour chaque étape de vol sur l'arc.

5.2.1 Détermination de la taille du pas pour chaque étape du vol

Pour chaque étape du vol, on doit choisir la taille du pas appropriée dont la valeur par défaut est donnée au premier point selon l'état du vol. Cependant, on doit s'assurer que la taille du pas ne soit pas supérieure à u , pour ne pas dépasser le nœud N_1 . Pour la première étape, qui est une étape de changement de vitesse, il faut s'assurer que la taille du pas ne soit pas supérieure à $|(V'_1 - V)/(dV/du)|$ pour ne pas dépasser la vitesse V'_1 . La taille du pas est définie par

$$\text{pas} := -\min \left(\text{pas-acc}, u, \left| \frac{V'_1 - V}{dV/du} \right| \right).$$

Pour la deuxième étape, qui est une étape de changement d'altitude, la taille du pas ne doit pas être supérieure à $|(h_1 - h)/(dh/du)|$ pour ne pas dépasser l'altitude h_1 . La taille du pas est définie par

$$\text{pas} := -\min \left(\text{pas-alt}, u, \left| \frac{h_1 - h}{dh/du} \right| \right).$$

Pour la troisième étape, qui est une étape à altitude et vitesse constantes, la taille du pas est définie par

$$\text{pas} := -\min (\text{pas-cst}, u).$$

5.2.2 Algorithme pour l'étape de changement de vitesse

D'après la troisième ligne du tableau 5.1, $\frac{dV}{du} = \frac{dV/dt}{V_G}$ et $\frac{dh}{du} = 0$. Le système d'équations différentielles (5.18) prend la forme particulière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = 0; \quad \frac{dV}{du} = \frac{dV/dt}{V_G}; \\ T = \frac{dV}{du} m V_G + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = -\max \left\{ \frac{1}{V_G} \left[C_{f3} \left(1 - \frac{h}{C_{f4}} \right) \right], \frac{1}{V_G} \left[C_{fcr} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right] \right\}; \\ \frac{dC}{du} = \max \left\{ \frac{1}{V_G} \left[CI + C_{f3} \left(1 - \frac{h}{C_{f4}} \right) \right], \frac{1}{V_G} \left[CI + C_{fcr} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (5.32)$$

On utilise une fonction appelée **rk4-acc**¹ pour résoudre le système d'équations différentielles (5.32).

5.2.3 Algorithme pour l'étape de changement d'altitude

Si $V = V_1$ et $h \neq h_1$, alors on a une étape de changement d'altitude.

- Si $h > h_1$, alors les fonctions f_V et f_h sont données après les lignes 3 et 4 du tableau 5.1 et la valeur de dm/dt est donnée par l'équation (5.30). Le système d'équations différentielles (5.18) prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{1 + (dh/du)^2} \sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = \frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}; \quad \frac{dV}{du} = \begin{cases} \frac{M^2}{2V} \gamma R k_T \frac{dh}{du} & \text{si } h < h_{\text{tropopause}}; \\ 0 & \text{si } h > h_{\text{tropopause}}; \end{cases} \\ T = \frac{m g (dh/du)}{V \sqrt{V_G^2 + (dh/du)^2}} + \frac{dV}{du} \frac{m V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = -\frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \left[C_{fcr} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right]; \\ \frac{dC}{du} = \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \left[CI + C_{fcr} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right], \end{array} \right. \quad (5.33)$$

1. L'utilisation des fonctions rk4 est décrite dans le pseudo-code à la sous-section 5.2.5.

où dh/dt est donnée par l'équation (5.25). On utilise une fonction appelée **rk4-mont** pour résoudre le système d'équations différentielles (5.33).

- Si $h < h_1$, alors les fonctions f_V et f_h sont données après les lignes 5 et 6 du tableau 5.1 et la valeur de dm/dt est donnée par l'équation (5.29). Le système d'équations différentielles (5.18) prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{1 + (dh/du)^2} \sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; \\ V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = \frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}; \\ \frac{dV}{du} = \begin{cases} \frac{M^2}{2V} \gamma R k_T \frac{dh}{du} & \text{si } h < h_{\text{tropopause}}; \\ 0 & \text{si } h > h_{\text{tropopause}}; \end{cases} \\ T = \frac{m g (dh/du)}{V \sqrt{V_G^2 + (dh/du)^2}} + \frac{dV}{du} \frac{m V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = -\max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [C_{fcr} C_{f1} (1 + \frac{V}{C_{f2}}) T]; \\ \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [C_{f3} (1 - \frac{h}{C_{f4}})]; \end{array} \right. \\ \frac{dC}{du} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [CI + C_{fcr} C_{f1} (1 + \frac{V}{C_{f2}}) T]; \\ \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [CI + C_{f3} (1 - \frac{h}{C_{f4}})]; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

où dh/dt est donnée par l'équation (5.25). On utilise une fonction appelée **rk4-desc** pour résoudre le système d'équations différentielles (5.34).

5.2.4 Algorithme pour l'étape de déplacement à altitude et vitesse constantes

Si $V = V_1$ et $h = h_1$, on a alors une étape à altitude et vitesse constantes. D'après la première ligne du tableau 5.1, $f_V = f_h = 0$ et dm/dt est donnée par l'équation (5.30). Le

système d'équations différentielles (5.18) prend donc la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = 0; \quad \frac{dV}{du} = 0; \\ T = C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = -\frac{1}{V_G} \left[C_{fcr} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right]; \\ \frac{dC}{du} = \frac{1}{V_G} \left[CI + C_{fcr} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right]. \end{array} \right. \quad (5.35)$$

On utilise une fonction appelée `rk4-cst` pour résoudre le système d'équations différentielles (5.35).

5.2.5 Pseudo-code de l'algorithme de calcul du coût de l'arc au complet

La description du code utilisé pour le calcul du coût d'un arc est donnée par le pseudo-code suivant :

```

----- point 1 de la phase de croisière -----
V1 = VOpt(m2,h1);           % calcul de la vitesse optimale
    % la fonction VOpt est une implémentation de la méthode de Newton
    % pour déterminer le maximum de SR
M1 = TasToMach(V1,h1);      % calcul de M1
    % la fonction TasToMach calcule le nombre M à partir de V et h
V1' = MachToTas(M1,h2);     % calcul de V1'
    % la fonction MachToTas calcule la vitesse V à partir de M et h
U = Distance (N1,N2);       % calcul de la distance U
pas-cst = 20 000; pas-acc = pas-alt = 1000; %initialisation de la taille des pas
m = m2; V=V2; h = h2; C = 0; u = U;          %initialisation des variables

```

```

point 2 de la phase de croisière
tant que (u > 0){
    % on répète la procédure jusqu'à u = 0
    si(V ≠ V1' et h = h2){
        % si on a une étape de changement de vitesse
        si(V > V1'){
            % si on doit décélérer
            pas = - minimum{u, pas-acc, |(V1' - V)/(dV/du)|};
            dV/dt = (eq. 5.27);
            rk4-acc;
        }
        si(V < V1'){
            % si on doit accélérer
            pas = - minimum{u, pas-acc, (V - V1')/(dV/du)};
            dV/dt = (eq. 5.28);
            rk4-acc;
        }
    }
    sinon{
        % si M = M1
        si(h ≠ h1){
            % si on a une étape de changement d'altitude
            si(h > h1){
                % si on a une montée
                pas = - minimum{u, pas-alt, (h - h1)/(dh/du)};
                rk4-mont;
            }
            si(h < h1){
                % si on a une descente
                pas = - minimum{dist - u, pas-alt, (h - h1)/(dh/du)};
                rk4-desc;
            }
        }
        sinon{
            % si on a fini les deux premières étapes
            pas = - minimum{dist - u, pas-cst};
            rk4-cst;
        }
    }
    u = u + pas;
}
si(h ≠ h1){
    % si on n'atteint pas l'altitude h1
    m = infini;
    C = infini;
}

```

Le temps de parcours de l'arc t est déterminé à partir du coût total et de la masse de carburant consommée par la relation suivante :

$$t = \frac{C - (m_1 - m_2)}{CI}, \quad (5.36)$$

où m_1 est la masse de carburant au début de l'arc et C est le coût total de l'arc. Si on n'atteint pas l'altitude h_1 à la fin du calcul, cet arc est alors non réalisable et on lui associe un coût infini.

5.2.6 Fonction de calcul du coût d'un arc en phase de croisière

La fonction `CoutArc` sert à calculer le coût d'un arc en phase de croisière. Un arc est un morceau de trajectoire dont la projection dans un plan horizontal est rectiligne. Pour un calcul de trajectoire optimale effectué avant le départ de l'avion, la masse de l'avion au départ est une inconnue. Cette masse n'est connue qu'à l'arrivée, où sa valeur est la masse de l'avion vide de carburant plus la masse du carburant de réserve. Dans ce contexte, le calcul des coûts sur chaque arc de la trajectoire doit aussi se faire à rebours. La fonction `CoutArc` retourne la masse de l'avion au départ de l'arc et le temps de parcours de l'arc en fonction des variables d'entrée.

Nous présentons les entrées-sorties de cette fonction, le prototype de la fonction et la méthode de calcul utilisée.

Variables d'entrée :

- `MasseArrivee`: Masse à l'arrivée (en kg);
- `IndiceCout`: Indice du coût (en kg/s : coût du temps exprimé en unité de carburant);
- Conditions au point de départ :
 - `LatitudeDepart`: Latitude (en degrés, minutes et secondes (exemple : 45,34,23));
 - `LongitudeDepart`: Longitude (en degrés, minutes et secondes);
 - `AltitudeDepart`: Altitude (en m);
 - `VitesseDepart`: Vitesse (en m/s).
- Conditions au point d'arrivée :
 - `LatitudeArrivee`: Latitude (en degrés, minutes et secondes);
 - `LongitudeArrivee`: Longitude (en degrés, minutes et secondes);
 - `AltitudeArrivee`: Altitude (en m);
 - `VitesseArrivee`: Vitesse (en m/s).
- Conditions météorologiques :
 - `VentLatitude`: Composante du vent suivant la latitude (en m/s) (cette composante est positive dans la direction nord);
 - `VentLongitude`: Composante du vent suivant la longitude (en m/s) (cette composante est positive dans la direction est);
 - `DeltaTemperature`: ΔT_{ISA} (en Kelvin) (différence entre la température au niveau

moyen de la mer et la température ISA (*International Standard Atmosphere*) au niveau moyen de la mer).

Variables de sortie :

- **MasseDepart**: Masse de départ (en kg) ;
- **TempsParcours**: Temps nécessaire pour parcourir l'arc (en s).

Méthode de calcul :

Le calcul du coût d'un arc en phase de croisière se fait en un maximum de trois étapes qui se succèdent dans l'ordre suivant :

- Si **VitesseDepart** \neq **VitesseArrivee**, alors on a une étape de changement de vitesse à altitude constante (décélération ou accélération) ;
- Si **AltitudeDepart** \neq **AltitudeArrivee**, alors on a une étape de changement d'altitude à un nombre de Mach constant (montée ou descente) ;
- Une étape à altitude **AltitudeDepart** et à vitesse **VitesseDepart** constantes.

Le coût total de l'arc (en kg de carburant) est donné par :

$$\text{MasseDepart} - \text{MasseArrivee} + \text{IndiceCout} \times \text{TempsParcours}.$$

5.3 Vérification de la méthode de calcul

Le calcul de la consommation sur un arc de vol est à la base de notre optimiseur de vol. Afin de déterminer le coût d'un arc, nous avons développé deux méthodes de discrétisation pour la résolution du système d'équations différentielles. La première méthode est celle qui a été présentée à la section 5.2.6 et est implémentée par Wissem Maazoun. La deuxième méthode est implémentée par Charles Pestieau qui est associé de recherche dans le cadre de ce projet.

La deuxième méthode utilise une discrétisation différente. La taille des pas d'intégration est définie en fonction de l'étape du vol de la manière suivante :

- pour les segments à vitesse et altitude constantes, l'intervalle des distances $[u_1, u_2]$ est divisé en pas d'intégration de longueur égale à Δu ;
- pour les segments d'accélération à altitude constante, l'intervalle des vitesses $[V_1, V_2]$ est divisé en pas d'intégration de longueur égale à ΔV ;
- pour les segments de changement d'altitude, l'intervalle des altitudes $[h_1, h_2]$ est divisé en pas d'intégration de longueur égale à Δh .

Notons que les deux méthodes discrétisent le même système d'équations différentielles mais elles ont été développées indépendamment et utilisent une méthodologie différente. Les deux méthodes de calcul sont comparées entre elles mais également avec une solution analytique lorsque c'est possible. L'objectif de cette comparaison est la vérification de nos méthodes de calcul. Le travail a mené à un exercice de contre-vérification systématique de chaque étape du calcul. Au cours de ce processus, nous avons corrigé plusieurs erreurs de programmation restées indétectées jusqu'ici.

5.3.1 Description de la méthode de comparaison

Pour comparer nos calculs, nous choisissons un appareil, un arc de vol, une masse finale, une vitesse initiale et une vitesse finale. Nous avons choisi comme appareil un Boeing de type B777-200 et nous avons utilisé les constantes BADA du fichier fourni par Eurocontrol, dont le nom est B-772____.OPF. Nous avons effectué un calcul à rebours du coût d'un arc qui relie deux points distants d'un demi-degré de longitude et de latitude, soit une distance horizontale de $d = 63\,980$ m. Nous avons choisi 208 700 kg comme masse finale de l'avion, qui est la masse de référence utilisée dans le fichier BADA. Notons qu'il reste à définir l'altitude et les vitesses initiale et finale pour déterminer complètement le scénario de vol sur cet arc.

Nous avons effectué des comparaisons sur trois types d'arc. En premier lieu, nous avons comparé nos calculs avec une solution analytique. Une solution analytique existe dans le cas de l'arc le plus simple, c'est-à-dire pour un segment de vol parcouru à vitesse et à altitude constante. Ces résultats sont présentés au premier paragraphe de la section 5.3.2. En second lieu, nous avons comparé nos calculs sur divers arcs incluant le cas avec un changement d'altitude et de vitesse. Nous prenons soin de choisir des arcs qui vérifient nos calculs de part et d'autre de la tropopause. Ces résultats sont présentés au deuxième paragraphe de la section 5.3.2. Finalement, nous comparons nos calculs en présence de vent. Pour ce faire, nous avons retenu l'arc le plus général et nous avons calculé la consommation sur cet arc pour différents vents. Ces résultats sont présentés au troisième paragraphe de la section 5.3.2.

Scénario à vitesse et altitude constantes

Nous avons effectué des comparaisons sur des arcs à altitude et vitesse constantes. Dans ce cas, on peut déterminer la solution analytique de l'équation différentielle. Cette solution nous permet de vérifier les résultats des deux stratégies.

Dans le cas où la vitesse et l'altitude sont constantes, l'équation de conservation de l'éner-

gie prend la forme

$$\frac{dm}{dt} = -C_{fcr}C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}}\right) \left[C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \right]. \quad (5.37)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} A &= C_{fcr}C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}}\right); \\ B &= C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2}; \\ C &= C_{D2} \frac{2g^2}{\rho V^2 S}, \end{cases}$$

alors l'équation (5.37) prend la forme

$$-m'(t) = AB + ACm^2(t). \quad (5.38)$$

La solution de l'équation différentielle (5.38) est

$$m(t) = \sqrt{\frac{B}{C}} \tan \left[-A\sqrt{BC}t + D \right],$$

où D est la constante d'intégration qui est déterminée à partir de la condition initiale $m(0)$.

Scénario avec changement d'altitude et de vitesse : vitesse de vent nulle

Le vol sur un arc peut comporter trois étapes :

- un changement de vitesse ;
- un changement d'altitude ;
- un segment à altitude et vitesse constantes.

Nous voulons effectuer des comparaisons en utilisant un ensemble représentatif de scénarios possibles. En phase de croisière, les changements d'altitude se font à un nombre de Mach constant. Comme le nombre de Mach est le rapport de la vitesse de l'avion et de la vitesse du son, nous portons alors une attention particulière à la tropopause puisque le calcul de la vitesse du son change de forme à cette altitude. Nos tests portent sur plusieurs arcs afin de couvrir toutes les possibilités. Pour tester tous les scénarios possibles de changements de palier, nous avons choisi des arcs tels que :

1. $h_1 < h_2 < h_{\text{tropopause}}$;
2. $h_2 < h_1 < h_{\text{tropopause}}$;
3. $h_1 < h_{\text{tropopause}} < h_2$;

$$4. \ h_2 < h_{\text{tropopause}} < h_1 ;$$

$$5. \ h_1 > h_2 > h_{\text{tropopause}} ;$$

$$6. \ h_2 > h_1 > h_{\text{tropopause}} ,$$

où h_1 et h_2 représentent respectivement les altitudes de départ et d'arrivée de l'arc et $h_{\text{tropopause}} \approx 11\,000$ m (36 000 pieds) est l'altitude de la tropopause.

Parmi les six arcs considérés, les deux premiers se trouvent sous la tropopause, un en ascension et l'autre en descente. Les deux arcs suivants traversent la tropopause, l'un en ascension et l'autre en descente. Les deux derniers arcs sont au-dessus de la tropopause, l'un en ascension et l'autre en descente. Nous avons choisi pour ces arcs les vitesses de départ et d'arrivée suivantes :

$$— \ V_1 = 250 \text{ m/s} ;$$

$$— \ V_2 = 255 \text{ m/s}.$$

Scénario avec changement d'altitude et de vitesse : vitesse de vent non nulle

L'effet du vent est traité de façon différente dans les deux méthodes de calcul. C'est pourquoi nous accordons une attention particulière au traitement du vent dans cette section. Pour les comparaisons de cette section, nous avons retenu parmi les arcs de la section 5.3.1 ceux qui traversent la tropopause. Nous avons choisi un arc qui commence à 35 000 pieds et se termine à 37 000 pieds et un deuxième arc qui à l'inverse commence à 37 000 pieds et se termine à 35 000 pieds. La consommation de ces deux arcs est calculée pour différentes valeurs de la vitesse du vent. Nous considérons les composantes du vent parallèle et perpendiculaire à la direction du vol.

5.3.2 Résultats

Comparaison avec la solution analytique

Nous avons choisi une vitesse constante $V = 255$ m/s et nous avons répété le calcul pour quatre altitudes constantes : 33 000, 35 000, 37 000 et 39 000 pieds. Nous avons déterminé le temps nécessaire pour parcourir l'arc, qui est donné par $t = d/V$. Comme le calcul se fait à rebours, nous avons utilisé $t = -d/V$. Nous avons calculé la masse m_1 de l'avion en utilisant la solution analytique et les deux stratégies de calcul et nous avons obtenu une correspondance à la précision machine, norme IEEE en double précision. Ces résultats sont présentés au tableau 5.3 où :

- m_W dénote la masse de carburant consommée en utilisant la première méthode (W. Maazoun) ;

- m_C dénote la masse de carburant consommée en utilisant la deuxième méthode (C. Pestieau).

Tableau 5.3 Tableau des résultats des deux méthodes avec altitude et vitesse constantes en utilisant $V = 255$ m/s et $m_2 = 208\,700$ kg.

h (pi)	m_W (kg)	m_C (kg)
33 000	491,205 077 925 930	491,205 077 925 930
35 000	472,272 036 945 476	472,272 036 945 476
37 000	454,257 079 311 355	454,257 079 311 355
39 000	438,083 590 088 761	438,083 590 088 761

La correspondance entre les résultats des deux méthodes constitue une vérification indépendante des stratégies de calculs. La correspondance avec la solution analytique constitue une vérification additionnelle des deux approches.

Comparaison avec changement d'altitude et de vitesse : vitesse de vent nulle

On a utilisé les six arcs décrits à la section 5.3.1. On s'est intéressé à la masse de carburant consommée et au temps nécessaire pour parcourir l'arc. Les résultats obtenus sont présentés au tableau 5.4, où :

- t_W dénote le temps nécessaire pour parcourir l'arc en utilisant la première méthode (W. Maazoun) ;
- t_C dénote le temps nécessaire pour parcourir l'arc en utilisant la deuxième méthode (C. Pestieau).

Tableau 5.4 Tableau des résultats des deux méthodes avec changement d'altitude et de vitesse, avec vitesse de vent nulle en utilisant $V_1 = 250$ m/s, $V_2 = 255$ m/s et $m_2 = 208\,700$ kg.

cas	h_1 (pi)	h_2 (pi)	m_W (kg)	m_C (kg)	t_W (s)	t_C (s)
1	33 000	35 000	569,9144	569,9217	256,1980	256,1986
2	35 000	33 000	418,0385	418,0393	255,6485	255,6483
3	35 000	37 000	551,4182	551,4228	256,1161	256,1168
4	37 000	35 000	401,5029	401,5060	255,6878	255,6891
5	37 000	39 000	533,3351	533,3370	255,5049	255,5062
6	39 000	37 000	387,0294	387,0309	255,6571	255,6581

Nous avons vérifié les différences des résultats des deux méthodes. Nous avons constaté qu'à la troisième décimale, nous commençons à avoir une différence. Nous avons donc décidé de représenter les résultats numériques avec quatre chiffres après la virgule.

Les résultats des deux méthodes sont comparables. Puisque la masse de l'avion est de l'ordre de 10^5 kg et la différence des résultats est de l'ordre de 10^{-3} kg, l'erreur relative est donc de l'ordre de 10^{-8} . D'autre part, l'erreur relative par rapport à la masse consommée est de l'ordre de 10^{-5} (i.e. si la masse de carburant nécessaire pour effectuer le vol est de 100 tonnes, l'erreur qu'on commet pour effectuer ce calcul est de 1 kg, ce qui est négligeable).

Comparaison avec changement d'altitude et de vitesse, avec vitesse de vent non nulle

Nous avons présenté au tableau 5.5 les résultats obtenus avec différentes valeurs de la vitesse du vent. Nous avons choisi différentes valeurs des composantes du vent parallèle (V^{\parallel}) et perpendiculaire (V^{\perp}) à la direction du vol. Un vent favorable est noté par une composante parallèle positive $V^{\parallel} > 0$. Nous avons choisi cinq cas possibles de vents. Nous avons répété le calcul à deux reprises pour chacun des cas, une première fois en montée et une seconde fois pour la descente. Nous avons choisi les vitesses $V_1 = 250$ m/s et $V_2 = 255$ m/s et les altitudes 35 000 pieds et 37 000 pieds. Les arcs choisis sont donnés au tableau 5.5.

Tableau 5.5 Tableau des résultats des deux méthodes avec changement d'altitude et de vitesse, avec vitesse de vent non nulle en utilisant $V_1 = 250$ m/s, $V_2 = 255$ m/s et $m_2 = 208\,700$ kg.

cas	V^{\parallel} (m/s)	V^{\perp} (m/s)	m_W (kg)	m_C (kg)	t_W (s)	t_C (s)
descente	20	0	367,802	367,805	236,743	236,744
montée	20	0	516,413	516,422	237,143	237,144
descente	0	20	402,964	402,968	256,509	256,511
montée	0	20	552,938	552,948	256,940	256,941
descente	40	20	339,838	339,841	221,022	221,023
montée	40	20	487,369	487,378	221,400	221,400
descente	-20	0	441,071	441,075	277,928	277,930
montée	-20	0	592,515	592,524	278,389	278,390
descente	-40	20	490,259	490,263	305,572	305,574
montée	-40	20	643,604	643,613	306,074	306,075

Nous avons vérifié les différences des résultats des deux méthodes. Nous avons constaté qu'on obtient presque les mêmes différences que nous avons obtenues avec des composantes de vents nulles. Nous avons donc décidé de représenter les résultats numériques avec trois

chiffres après la virgule. On peut dire que les résultats des deux méthodes sont comparables.

Vérification du comportement de l'algorithme

Pour vérifier le comportement de l'algorithme de calcul du coût d'un arc en phase de croisière, on a représenté à la figure 5.2 le profil de l'altitude et à la figure 5.3 le profil de la vitesse propre en fonction de la distance parcourue pour un arc typique. L'arc choisi comprend les trois étapes possibles d'un arc en phase de croisière, soit le changement de vitesse, le changement d'altitude, ainsi que le vol à vitesse et altitude constantes. Ces graphes sont construits en utilisant les sorties de notre programme. On remarque que toutes les étapes sont respectées. On a vérifié aussi que toutes les valeurs de V pour l'étape de changement d'altitude à un nombre de Mach M constant étaient aussi respectées. On peut conclure que notre algorithme respecte chacune des trois étapes et donne une trajectoire réaliste du point de vue du pilotage.

5.3.3 Conclusion

Nous avons fait trois séries de comparaisons. En premier lieu, nous avons comparé nos calculs avec une solution analytique qui est disponible dans le cas le plus simple où la vitesse et l'altitude sont constantes. Pour cette première comparaison, nous avons obtenu une correspondance à précision machine. Ceci est une vérification que les deux méthodes effectuent le calcul recherché et c'est également une vérification partielle de nos méthodes numériques.

En deuxième lieu, nous avons comparé nos résultats sur des arcs de vol comprenant un changement d'altitude et de vitesse. Aucune solution analytique n'est disponible pour un scénario de cette complexité. Nous comparons donc les deux stratégies de calcul. On constate au tableau 5.4 que la correspondance est excellente. Les différences obtenues sont négligeables pour des fins commerciales même lorsque cumulées sur un vol de longue durée. De plus, les différences sont d'un ordre de grandeur qui peut être attribué aux différences des deux méthodologies utilisées.

En troisième lieu, nous avons ajouté une composante de vent à la dynamique du vol. Nos comparaisons portent sur un arc de vol avec changement d'altitude et de vitesse déjà évalué plus haut, auquel nous avons rajouté une composante de vent parallèle à la direction du vol et une autre composante perpendiculaire à la direction du vol. Les résultats de cette comparaison sont donnés au tableau 5.5 où l'on constate que la correspondance entre les deux méthodes demeure très bonne.

Notons que, pour ces tests, nous avons utilisé des pas d'intégration de grande taille pour la discrétisation des équations différentielles. La taille de ces pas est donnée par :

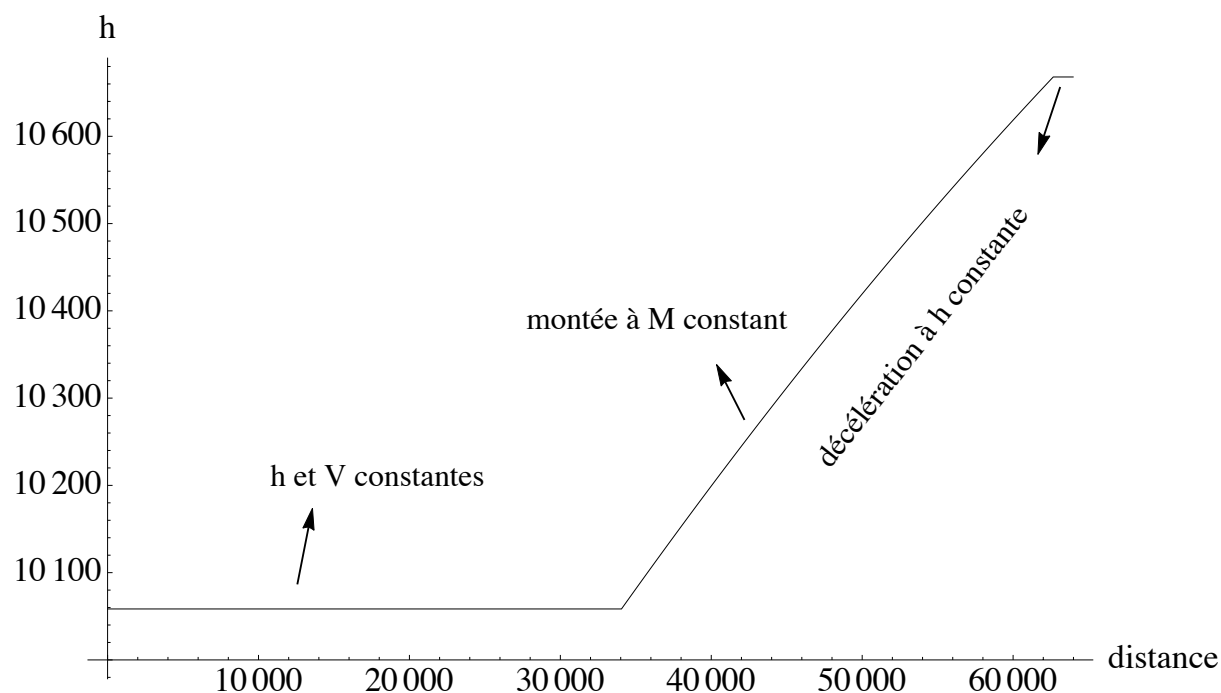


Figure 5.2 Profil de l'altitude h en m en fonction de la distance parcourue en m en phase de croisière.

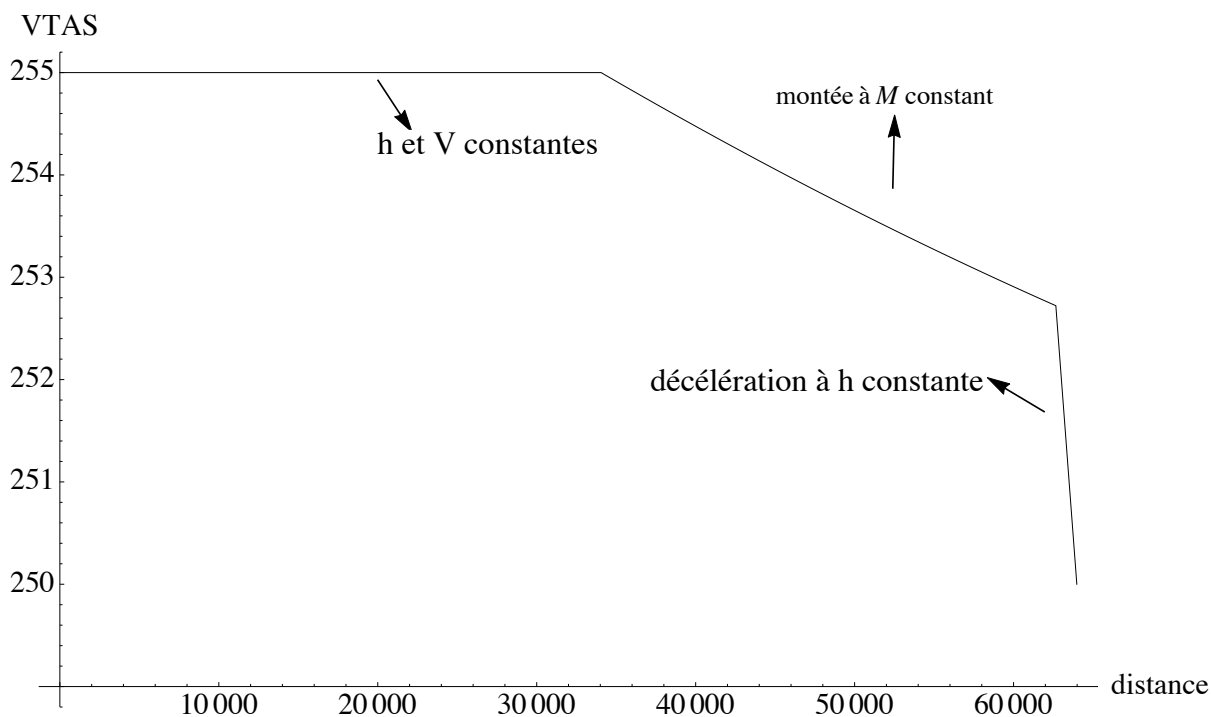


Figure 5.3 Profil de la vitesse propre V en m/s en fonction de la distance parcourue en m en phase de croisière.

- *pas-cst* = 20 000 m, lorsque la vitesse et l'altitude sont constantes ;
- *pas-acc* = 5000 m, lorsque l'altitude est constante et la vitesse est variable ;
- *pas-alt* = 5000 m, lorsqu'on a un changement d'altitude.

À la prochaine section, nous vérifions l'effet de la taille des pas d'intégration et la convergence numérique de la méthode en fonction de la taille des pas utilisés.

5.4 Convergence et erreurs numériques

Dans cette section, nous faisons une analyse de l'erreur numérique. Nous avons déjà vérifié la correspondance des résultats des deux méthodes à la section précédente. Nous présentons ici un autre type d'analyse. D'abord, nous avons poursuivi l'analyse de convergence à la limite de la précision possible. Ensuite, nous avons vérifié l'ordre de convergence de la méthode. Finalement, nous expliquons l'origine de la différence entre les résultats de notre méthode par rapport au taux de convergence théorique attendu pour le schéma numérique utilisé.

L'objectif de cette section est double. Le premier est de compléter le processus de vérification de nos calculs en vérifiant le taux de convergence. Le deuxième est de déterminer la précision de nos résultats afin de faire un choix judicieux de la taille du pas d'intégration.

Dans la première sous-section, nous décrivons le segment de vol caractéristique choisi pour nos calculs et la stratégie suivie pour montrer la convergence de la méthode numérique. Dans la deuxième sous-section, nous calculons le taux de convergence de la méthode et nous expliquons l'origine de l'écart par rapport au taux de convergence théorique. Dans la troisième sous-section, nous comparons la convergence des deux méthodes et nous voyons qu'il est possible de faire un choix judicieux quant à la taille du pas d'intégration.

5.4.1 Choix du segment et des mesures

Nous avons choisi un arc qui relie deux nœuds qui sont d'un demi-degré de longitude. L'arc choisi comporte trois étapes de vol en croisière, soit une étape à altitude et vitesse constantes suivie d'une étape de changement d'altitude et une dernière étape de changement de vitesse. Ce type d'arc correspond à environ deux tiers des arcs de la grille de calcul, même si la trajectoire finale ne comporte qu'un petit nombre de ce type d'arcs comparé aux arcs à altitude et vitesse constantes.

Pour que notre calcul de la trajectoire optimale soit rapide et précis, nous devons choisir des pas assez fins pour obtenir une bonne précision sans que le calcul soit trop long. L'arc choisi a une altitude initiale de 33 000 pieds et une altitude finale de 35 000 pieds. La distance horizontale parcourue est de 63 980 m, ce qui est un exemple typique d'un arc dans une grille de calcul avec des écarts d'un demi-degré entre les nœuds. La vitesse initiale est de 250 m/s

et la vitesse finale est de 255 m/s. L'arc se décompose en trois étapes :

- la première étape est parcourue à vitesse et à altitude constantes c'est-à-dire à la vitesse initiale de 250 m/s et à l'altitude initiale de 33 000 pieds ;
- la deuxième étape est une ascension à un nombre de Mach constant. Puisque nous sommes sous la tropopause, ceci implique une ascension avec une réduction de la vitesse propre. L'ascension est de 33 000 pieds à 35 000 pieds et la vitesse est maintenue au nombre de Mach de 0,835 538 qui donne un facteur de partage de l'énergie de 1,102 51. La vitesse propre à la fin de l'ascension est de 247,76 m/s ;
- la troisième étape est parcourue à l'altitude finale de 33 000 pieds. C'est une accélération de la vitesse propre de 247,76 m/s obtenue à la fin de l'ascension jusqu'à la vitesse propre finale de 255 m/s recherchée à la fin de l'arc en utilisant la poussée maximale de l'avion et en respectant l'accélération maximale de 2 pi/s^2 .

Comme le calcul de l'arc est fait à rebours à partir d'une masse finale connue de 208 700 kg, chaque étape est donc calculée à rebours en commençant par la dernière. On calcule d'abord l'étape de l'accélération et on obtient ainsi la valeur de la masse au début de l'accélération, ce qui est également la fin de l'ascension. On calcule ensuite l'étape de l'ascension et on obtient ainsi la valeur de la masse au début de l'ascension ce qui est également la fin de l'étape parcourue à vitesse et à altitude constantes. Finalement, on calcule l'étape parcourue à vitesse et à altitude constantes pour obtenir la masse initiale de l'arc.

Nos mesures portent sur le taux de convergence de la méthode numérique utilisée pour le calcul de la consommation de carburant. Cette consommation est calculée plusieurs fois en faisant varier la taille du pas d'intégration. En principe, la convergence du calcul doit être analysée pour chacune des trois étapes décrites ci-dessus. En pratique, le calcul de la consommation à vitesse et à altitude constantes est tellement précis sur les distances de vol que nous considérons qu'il s'avère ardu d'en illustrer la convergence. En fait, tous les écarts de valeurs sont de l'ordre de la précision machine. Pour cette raison, nous analysons la convergence du calcul de la consommation pour les étapes de l'accélération et de l'ascension seulement.

5.4.2 Taux de convergence

Dans cette section, nous comparons le taux de convergence de notre méthode numérique avec le taux de convergence théorique prévu pour ce type de méthode. La consommation de carburant pour tout l'arc est recalculée en faisant varier la taille du pas d'intégration uniquement pour une seule étape et en gardant la taille du pas d'intégration fixe pour les deux autres. Le taux de convergence est ainsi déterminé d'abord pour le calcul de l'étape en accélération et ensuite pour le calcul de l'étape en ascension. Lorsque nous faisons varier

la taille du pas d'intégration, sa plus petite valeur donne la mesure de la consommation la plus précise qui servira de consommation de référence. Nous avons représenté sur une échelle logarithmique l'écart par rapport à cette consommation de référence en fonction de la taille du pas d'intégration. L'ordre de convergence est donné par la pente de la courbe obtenue. En théorie, puisque nous employons une méthode d'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre, la courbe attendue est une droite de pente quatre. Dans les deux prochaines sous-sections, nous traçons ces courbes. Cette analyse est faite d'abord pour le calcul de l'étape d'accélération et ensuite pour le calcul de l'étape d'ascension.

Étant donné que notre méthode utilise une taille du pas d'intégration qui est une fraction de la distance parcourue horizontalement et que la distance nécessaire pour parcourir chacune des étapes n'est pas connue d'avance, nous avons dû exécuter l'algorithme une première fois en utilisant une très petite taille de pas d'intégration pour chacune des trois étapes, soit une taille de 10 m pour déterminer ces distances. Pour l'arc que nous avons choisi, nous avons trouvé que la distance d'accélération est de 9551 m et que la distance nécessaire pour l'ascension est de 25 421,5 m.

Ordre de convergence pour l'étape d'accélération

Nous avons calculé la consommation de carburant pour tout l'arc en utilisant une taille de pas de longueur 100 m pour l'étape parcourue à altitude et à vitesse constantes, une taille de pas de longueur 10 m pour l'étape d'ascension et une taille de pas de longueur $pas(i) = \frac{9551}{i}$ pour l'étape d'accélération, où $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Le calcul est donc répété pour chacune des 100 valeurs de i .

Nous dénotons par $m(i)$ la masse de carburant consommée en utilisant le $i^{\text{ème}}$ pas et par $m^* = m(100)$ la masse de référence. Nous avons calculé les écarts de masse Δm_i et δm_i définis par :

$$\begin{cases} \Delta m_i &:= |m(i) - m^*|; \\ \delta m_i &:= |m(i+1) - m(i)|, \end{cases}$$

où $i = 1, 2, \dots, 99$. La première valeur, Δm_i , est utilisée pour déterminer le taux de convergence par rapport à une valeur de référence m^* . La deuxième valeur, δm_i , est utilisée pour déterminer l'ordre de convergence entre deux tailles de pas consécutifs.

À la figure 5.4, nous avons représenté Δm_i en fonction de la taille du pas $pas(i)$ ainsi qu'une droite de pente quatre sur une échelle logarithmique. À la figure 5.5, nous avons représenté δm_i en fonction de la taille du pas $pas(i)$ ainsi qu'une droite de pente quatre sur une échelle logarithmique. À la figure 5.6, nous avons superposé les figures 5.4 et 5.5.

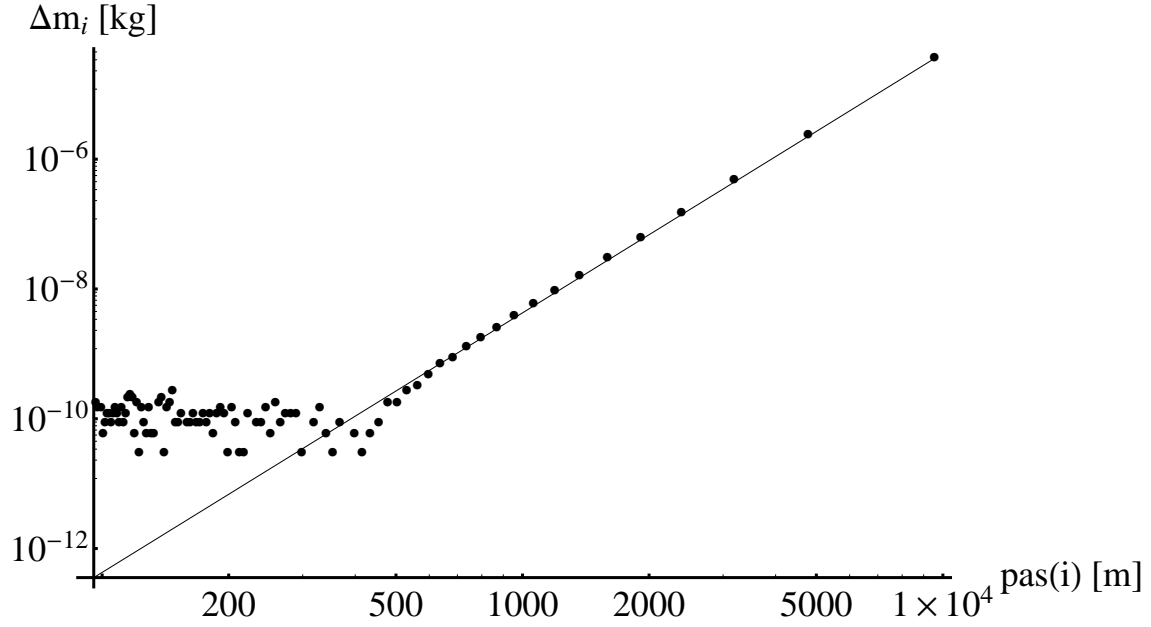


Figure 5.4 Écart de masse Δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'accélération.

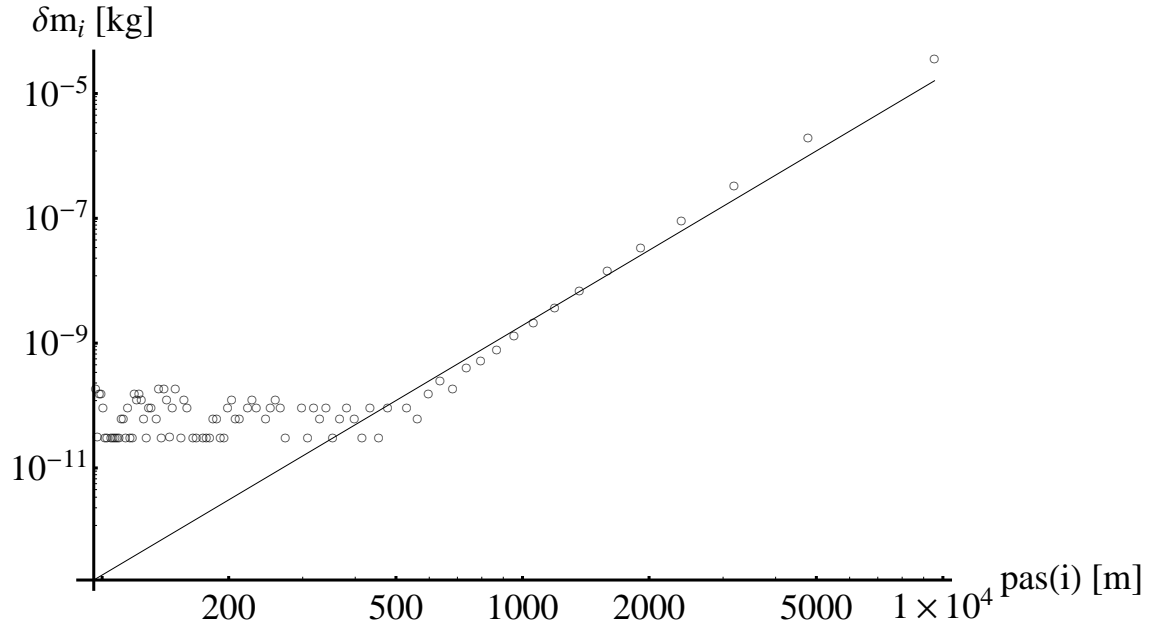


Figure 5.5 Écart de masse δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'accélération.

Ordre de convergence pour l'étape d'ascension

Nous avons calculé la consommation de carburant pour tout l'arc en utilisant une taille de pas de 100 m pour l'étape parcourue à altitude et à vitesse constantes, une taille de pas

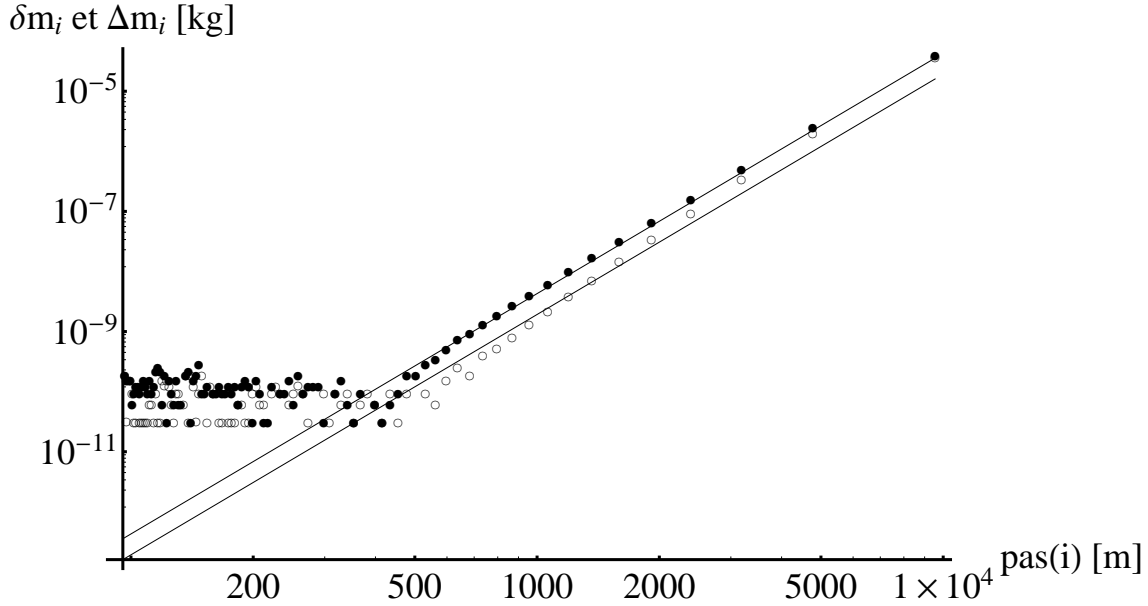


Figure 5.6 Les figures 5.4 et 5.5 superposées.

de 10 m pour l'étape d'accélération et une taille de pas de longueur $pas(i) = \frac{25421,5}{i}$ m pour l'étape d'ascension, où $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Le calcul est donc répété pour chacune des 100 valeurs de i .

À la figure 5.7, nous avons représenté Δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$, ainsi qu'une droite de pente quatre sur une échelle logarithmique. À la figure 5.8, nous avons représenté δm_i en fonction de $pas(i)$, ainsi qu'une droite de pente quatre sur une échelle logarithmique. À la figure 5.9, nous avons superposé les figures 5.7 et 5.8.

Aux figures 5.4, 5.5, 5.7 et 5.8, on voit que pour une taille inférieure à 700 m ($i \geq 15$), on obtient $\Delta m_i \simeq \delta m_i \simeq 10^{-10}$. Notons que la masse de l'avion que nous utilisons pour résoudre le problème est de l'ordre de 10^5 , et donc l'erreur relative est de l'ordre de 10^{-15} . Nous pouvons donc dire que pour une taille de pas inférieure à 700 m, nous obtenons un résultat précis à la précision machine (norme IEEE).

Nous nous intéressons dans ce cas aux pentes des graphes représentés aux figures 5.4, 5.5, 5.7 et 5.8 pour les tailles de pas supérieures à 700 m ($i < 15$). Nous avons utilisé la méthode des moindres carrés pour déterminer la pente de chacune des quatre droites. Nous avons utilisé les couples $(pas(i), \Delta m_i)$ et $(pas(i), \delta m_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, 14$. Nous avons trouvé que la pente du premier et du troisième graphe est d'environ 4,01 et que celle du deuxième et du quatrième graphe est d'environ 4,6. Comme nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, ces valeurs de pentes sont donc compatibles avec cette valeur théorique.

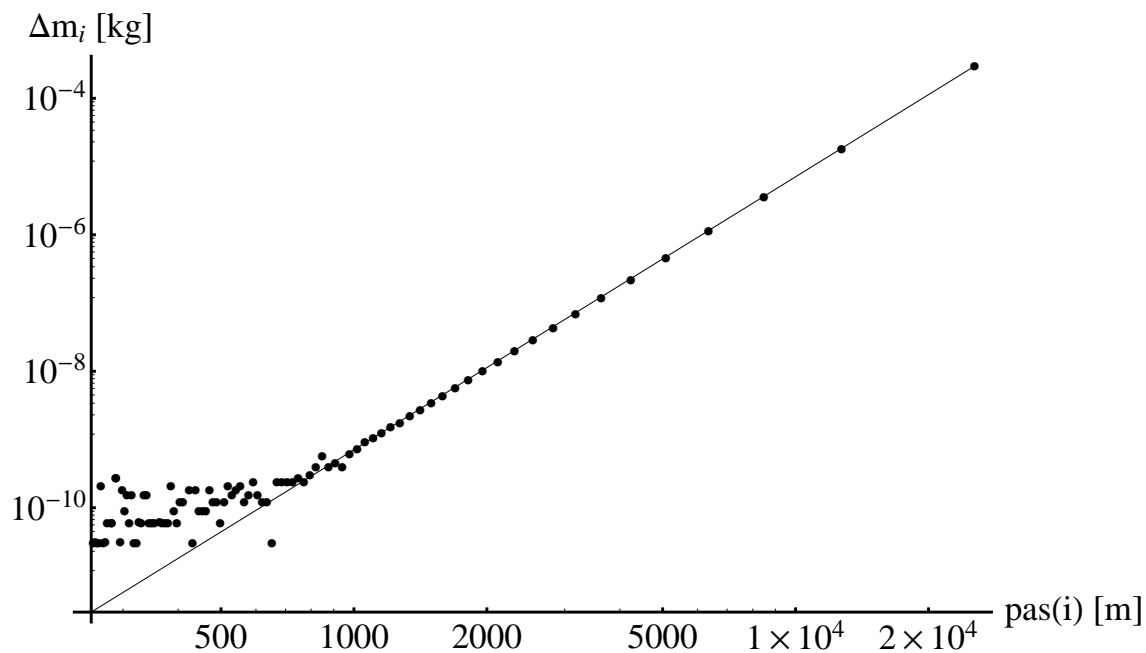


Figure 5.7 Écart de masse Δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'ascension.

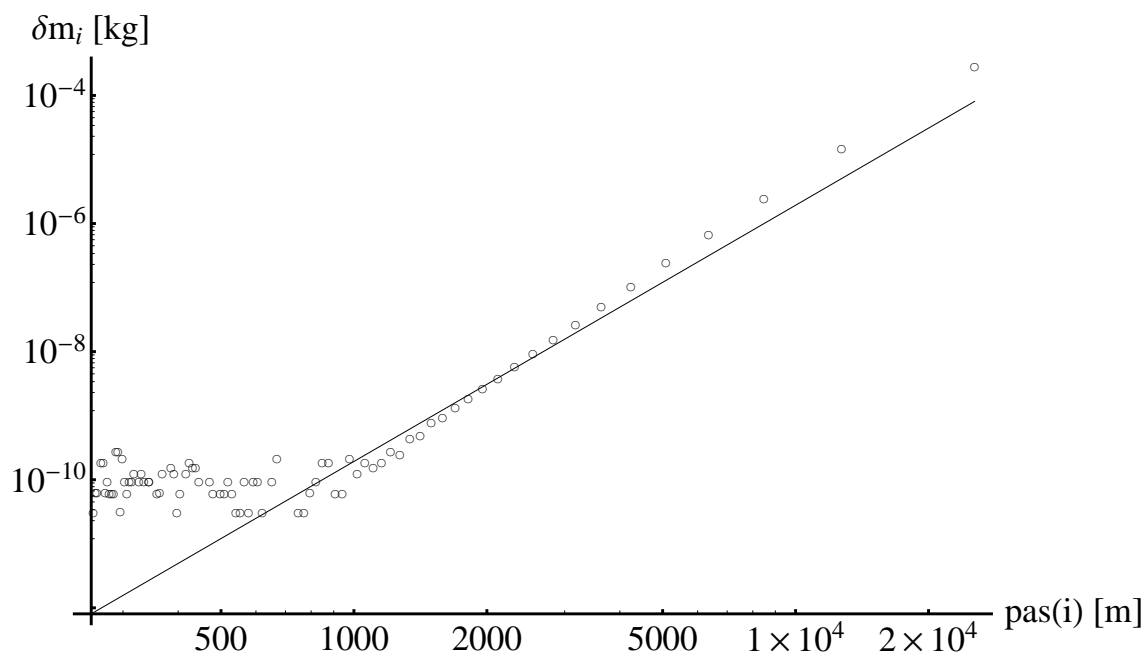


Figure 5.8 Écart de masse δm_i en fonction de la taille de pas $pas(i)$ pour l'étape d'ascension.

Ordre de convergence pour l'étape à vitesse et à altitude constantes

Nous avons calculé la consommation de carburant pour tout l'arc en utilisant une taille de pas de 10 m pour l'étape d'accélération, une taille de pas de 10 m pour l'étape d'ascension

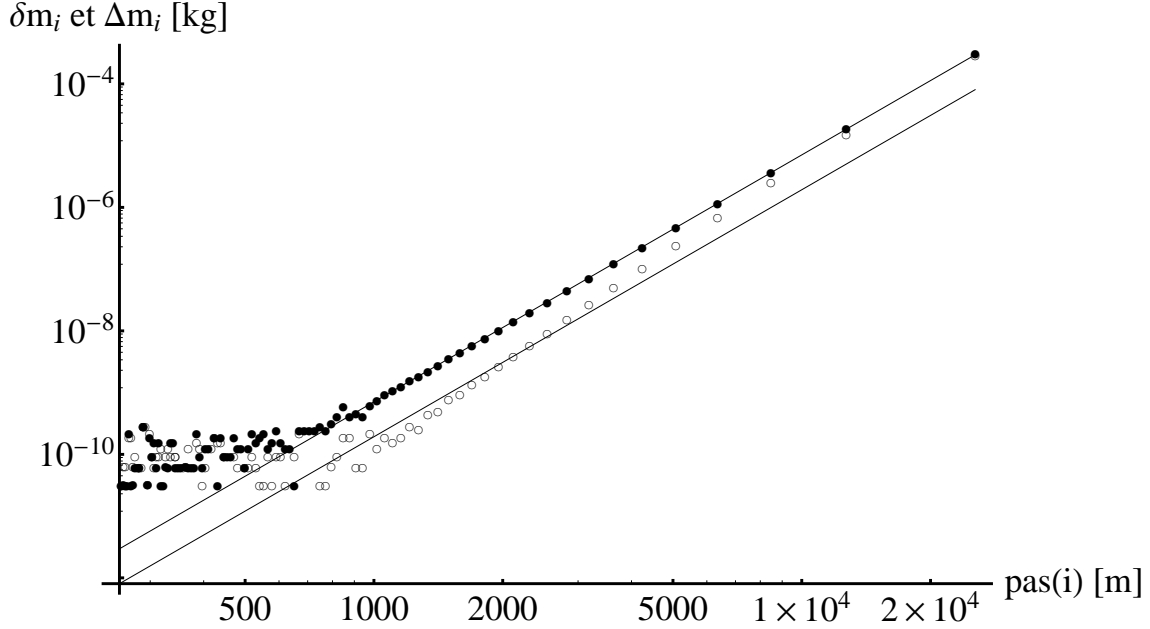


Figure 5.9 Les figures 5.7 et 5.8 superposés.

et une taille de pas de longueur $pas(i) = \frac{29007,5}{i}$ pour l'étape parcourue à altitude et vitesse constantes, où $i \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Le calcul est donc répété pour chacune des 100 valeurs de i .

Nous avons constaté que quelque soit la valeur de $pas(i)$, nous obtenons $\Delta m_i \simeq 10^{-10}$. Nous pouvons donc dire que nous obtenons un résultat précis à la précision machine même si nous utilisons un seul pas pour l'étape parcourue à altitude et à vitesse constantes.

Dans la suite de cette thèse, nous ne ferons pas varier la taille du pas d'intégration de l'étape parcourue à vitesse et à altitude constantes car l'erreur commise pour le calcul de cette étape est si faible qu'il nous a été impossible de détecter une variation de la consommation pour les distances que nous considérons.

5.4.3 Comparaison des deux méthodes

Dans cette section, nous montrons d'abord que les deux méthodes de calcul convergent vers la même solution. Nous nous servons ensuite des courbes de convergence obtenues pour estimer la précision de nos calculs en fonction du nombre de pas d'intégration utilisé. Puisque nous connaissons le nombre approximatif d'ascensions accomplies pendant le vol, nous sommes en mesure d'estimer la précision d'un calcul de trajectoire complet en fonction du nombre de pas d'intégration utilisés sur chaque arc d'ascension.

Une illustration de la convergence des deux méthodes vers le même résultat est présentée à

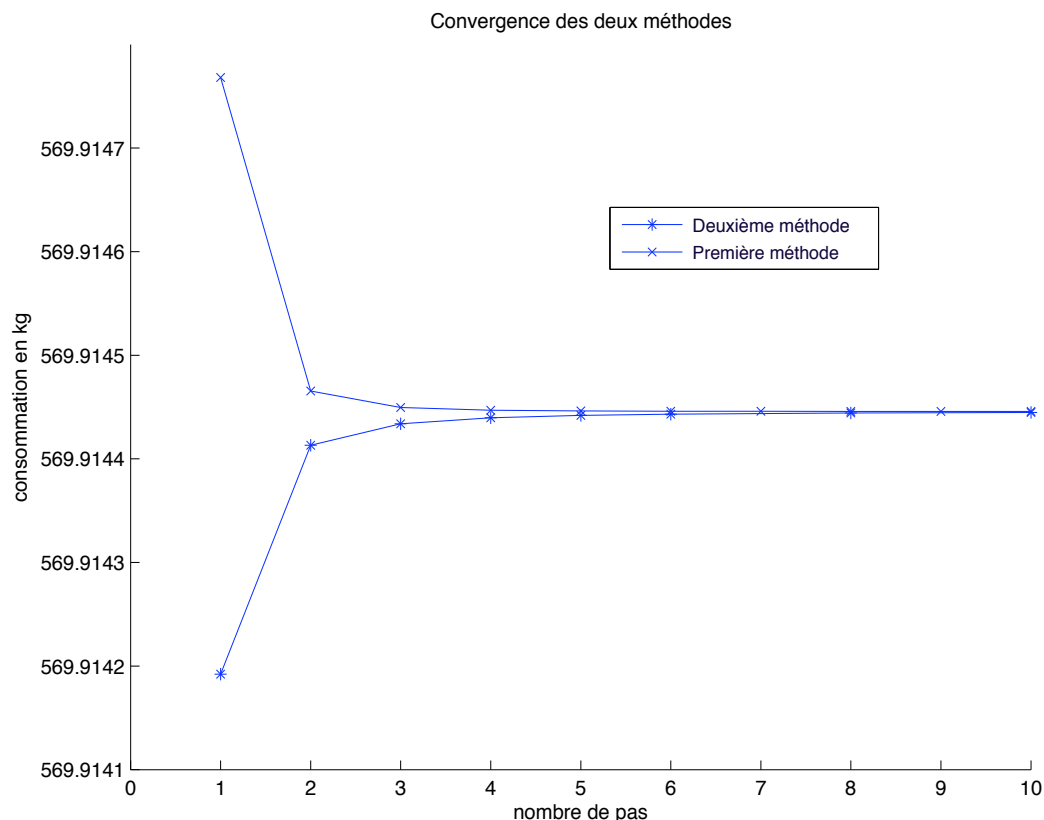


Figure 5.10 Comparaison des courbes de convergence des deux méthodes.

la figure 5.10. Nous avons affiché la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration utilisé. Notons que nous faisons varier à la fois le nombre de pas d'intégration de l'étape d'ascension et le nombre de pas d'intégration de l'étape d'accélération. Plus précisément, nous faisons varier le nombre de pas d'intégration de la même façon sur ces deux étapes. Ainsi chaque mesure affichée à la figure 5.10 utilise le même nombre de pas pour l'étape d'accélération et pour l'étape d'ascension. Pour la mesure la plus précise, qui utilise 10 pas d'intégration, nous obtenons une valeur de la consommation de 569,914 445 71 kg en accord sur toutes les décimales pour les deux méthodes de calcul.

Nous nous servons maintenant des valeurs de la figure 5.10 pour estimer l'erreur commise par notre calcul de consommation en fonction du nombre de pas d'intégration utilisé. Si nous choisissons de calculer les étapes d'ascension et d'accélération avec un seul pas d'intégration alors l'écart entre cette mesure de la consommation, qui est la plus grossière, et la mesure la plus fine qui est obtenue avec dix pas d'intégration, est de l'ordre de 10^{-4} kg pour les deux méthodes. Donc si nous choisissons un seul pas d'intégration pour chaque étape, nous commettons une erreur inférieure à un tiers de gramme pour l'une ou l'autre des deux méthodes. Selon le même raisonnement, si nous choisissons de calculer les étapes d'accélération et d'ascension en deux pas d'intégration, alors nous commettons une erreur inférieure à

0,000 025 kg pour l'une ou l'autre des deux méthodes. Remarquons qu'un vol typique compte trois ou quatre ascensions de ce genre et que l'ascension est la phase la plus coûteuse du vol. Donc si nous choisissons un seul pas d'intégration pour le calcul des étapes d'ascension et d'accélération, nous pouvons estimer une borne supérieure sur l'erreur commise est de l'ordre de 0,0001 kg pour toutes les phases d'ascension du vol. Si, par contre, nous choisissons deux pas d'intégration, alors nous pouvons estimer une borne supérieure sur l'erreur commise de 0,000 5 kg pour toute la phase d'ascension du vol et pour l'une ou l'autre des deux méthodes.

5.4.4 Conclusion

En premier lieu, nous avons montré que notre méthode numérique converge correctement et que l'ordre de convergence est proche de celui prédit par la théorie. En deuxième lieu, nous avons montré que nos deux méthodes convergent vers la même valeur de la consommation. Les courbes de convergence des deux méthodes nous permettent ensuite d'estimer l'erreur commise sur l'arc de vol considéré en fonction du nombre de pas d'intégration utilisé. Nous pouvons également obtenir un premier estimé de l'erreur commise pour toute la phase d'ascension du vol en fonction du nombre de pas d'intégration utilisé pour les étapes d'ascension et d'accélération.

CHAPITRE 6

CALCUL DU COÛT D'UN ARC EN PHASES DE MONTÉE INITIALE ET DE DESCENTE FINALE

On présente dans ce chapitre les méthodes utilisées pour le calcul du coût des arcs en phase de montée initiale et de descente finale.

6.1 Définition des arcs de montée initiale et de descente finale

Étant donné que les trajectoires du décollage et de l'atterrissage sont gérées par les aéroports et l'«ATC» (pour *Air Traffic Control* en anglais) et que pour les altitudes sous 10 000 pieds, la vitesse V_{CAS} (pour *Calibrated Air Speed* en anglais) de l'avion est contrainte à 250 nœuds, on détermine alors la trajectoire optimale qui relie les deux points N_D et N_F . Les points N_D et N_F sont définis par l'altitude de 10 000 pieds à la vitesse V_{CAS} de 250 nœuds en ascension et en descente, respectivement. En fait, il n'y a rien à optimiser sous l'altitude de 10 000 pieds à cause des contraintes sur le vol. On concentre donc l'optimisation sur la trajectoire qui se trouve entre les points N_D et N_F , aux altitudes supérieures à 10 000 pieds.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux arcs de montée initiale et de descente finale. Un arc de montée initiale est un arc qui relie le point N_D au point N_{dc} qui est à altitude et vitesse de croisière. Le point N_{dc} est le premier nœud de la phase de croisière. Un arc de descente finale est un arc qui relie le point N_{fc} qui est à altitude et vitesse de croisière au point N_F . Le point N_{fc} est le dernier nœud de la phase de croisière.

La masse de l'avion n'est connue qu'à l'arrivée au point N_F . Cette masse correspond à la masse de l'avion sans carburant plus la masse du carburant de réserve réglementaire moins la masse du carburant nécessaire pour l'atterrissage. Comme dans le cas d'un arc en phase de croisière, on calcule les coûts des arcs de la descente finale et de la montée initiale à rebours. La descente finale représente la dernière phase de la trajectoire mais la première à être calculée. Cependant, la phase de montée initiale est la première phase de la trajectoire mais la dernière à être calculée. La projection de ces deux arcs dans le plan horizontal est rectiligne. Le problème consiste à déterminer la vitesse, l'altitude et la masse de l'avion en tout point de ces deux arcs.

D'après le rapport *Flight Operations Support & Line Assistance* (2002) (pp. 155 et 164), la descente et la montée se font généralement à un nombre de Mach constant au-dessus de l'altitude de transition et à une vitesse V_{CAS} constante sous cette altitude. L'altitude de

transition est l'altitude où le nombre de Mach et la vitesse V_{CAS} correspondent à la même vitesse propre.

6.2 Détermination de l'altitude de transition

D'une part, la vitesse propre V est une fonction du nombre de Mach M et de l'altitude h définie par l'équation (5.19) d'après Nuic (2009) (p. 11). D'autre part, V est une fonction de la vitesse V_{CAS} et de l'altitude h définie par l'équation

$$V = \sqrt{\frac{2p}{\mu\rho} \left\{ \left(1 + \frac{p_0}{p} \left[\left(1 + \frac{\mu\rho_0}{2p_0} V_{CAS}^2 \right)^{1/\mu} - 1 \right]^\mu - 1 \right) \right\}}, \quad (6.1)$$

où $\mu = \frac{\gamma-1}{\gamma}$, p et ρ sont la pression et la masse volumique de l'air à l'altitude h et p_0 et ρ_0 sont la pression et la masse volumique de l'air au niveau de la mer.

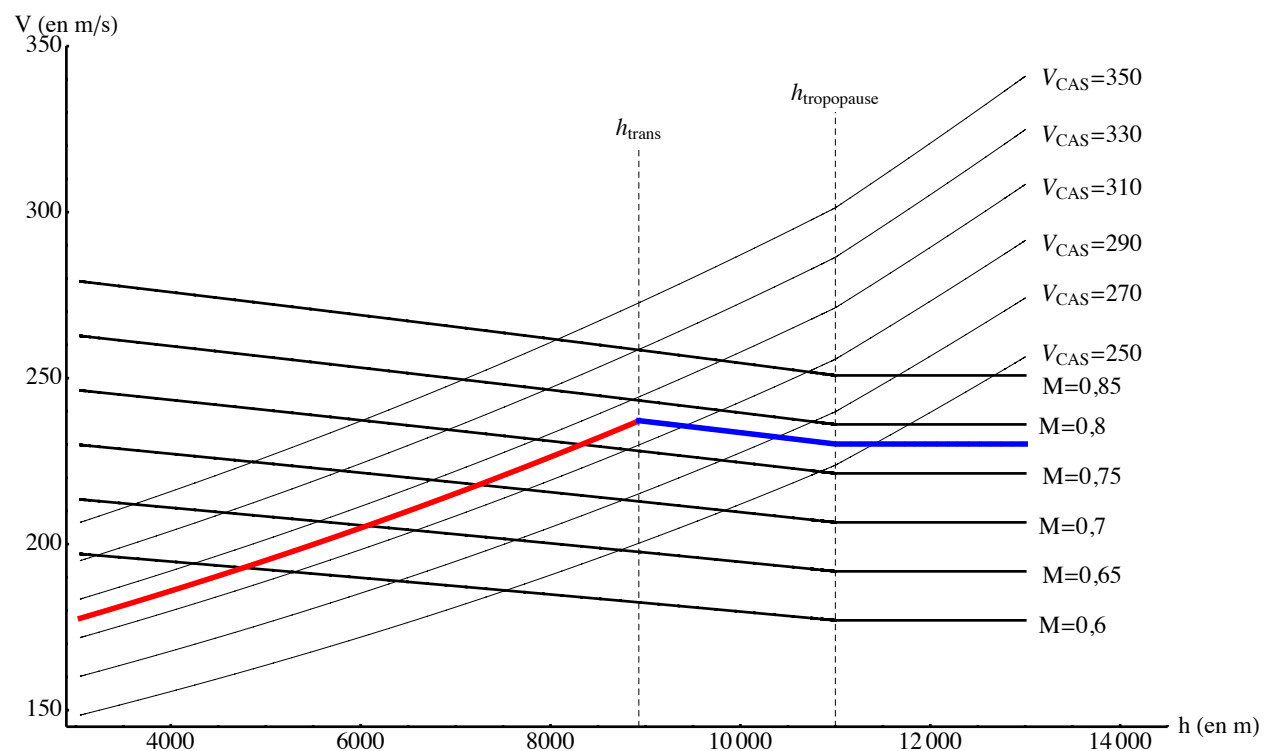


Figure 6.1 Graphes de V en fonction de h pour différentes valeurs de V_{CAS} en traits fins (équation (6.1)) et pour différentes valeurs de M en traits gras (équation (5.19)).

À la figure 6.1, on a représenté la vitesse propre V en fonction de l'altitude h pour les valeurs de M entre 0,6 et 0,85 et de V_{CAS} entre 250 et 350 nœuds. On a aussi représenté un

profil $M = 0,78/V_{\text{CAS}} = 300$ nœuds où la courbe du nombre M est affichée en bleu et celle de V_{CAS} est en rouge. Pour ce profil M/V_{CAS} , l'altitude de transition h_{trans} est celle où les courbes de V_{CAS} et de M se croisent. À cette altitude, les équations (6.1) et (5.19) sont égales et donc

$$M\sqrt{\gamma R T e_{\text{trans}}} = \sqrt{\frac{2 p_{\text{trans}}}{\mu \rho_{\text{trans}}} \left\{ \left(1 + \frac{(p_0)_{\text{ISA}}}{p_{\text{trans}}} \left[\left(1 + \frac{\mu (\rho_0)_{\text{ISA}}}{2 (p_0)_{\text{ISA}}} V_{\text{CAS}}^2 \right)^{1/\mu} - 1 \right]^\mu - 1 \right)^\mu - 1 \right\}}. \quad (6.2)$$

En élevant (6.2) au carré, on obtient

$$M^2 \gamma R T e_{\text{trans}} \frac{\mu}{2} \frac{\rho_{\text{trans}}}{p_{\text{trans}}} = \left(1 + \frac{(p_0)_{\text{ISA}}}{p_{\text{trans}}} \left[\left(1 + \frac{\mu (\rho_0)_{\text{ISA}}}{2 (p_0)_{\text{ISA}}} V_{\text{CAS}}^2 \right)^{1/\mu} - 1 \right]^\mu - 1 \right)^\mu. \quad (6.3)$$

À partir de l'équation (4.35), on peut déduire que

$$\frac{p_{\text{trans}}}{\rho_{\text{trans}}} = R T e_{\text{trans}}. \quad (6.4)$$

Si on substitue l'équation (6.4) dans l'équation (6.3), on obtient alors

$$M^2 \gamma \frac{\mu}{2} + 1 = \left(1 + \frac{(p_0)_{\text{ISA}}}{p_{\text{trans}}} \left[\left(1 + \frac{\mu (\rho_0)_{\text{ISA}}}{2 (p_0)_{\text{ISA}}} V_{\text{CAS}}^2 \right)^{1/\mu} - 1 \right]^\mu \right)^\mu. \quad (6.5)$$

On peut déduire de l'équation (6.5) que

$$p_{\text{trans}} = (p_0)_{\text{ISA}} \frac{\left(1 + \frac{\mu (\rho_0)_{\text{ISA}}}{2 (p_0)_{\text{ISA}}} V_{\text{CAS}}^2 \right)^{1/\mu} - 1}{\left(1 + \frac{\mu}{2} \gamma M^2 \right)^{1/\mu} - 1}. \quad (6.6)$$

En utilisant les substitutions

$$\mu = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{(\rho_0)_{\text{ISA}}}{(p_0)_{\text{ISA}}} = \frac{1}{R (T_0)_{\text{ISA}}},$$

l'équation (6.6) prend alors la forme

$$p_{\text{trans}} = (p_0)_{\text{ISA}} \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_{\text{CAS}}^2}{\gamma R (T_0)_{\text{ISA}}} \right)^{1/\mu} - 1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/\mu} - 1}. \quad (6.7)$$

La valeur de p_{trans} est la pression atmosphérique de l'air à l'altitude h_{trans} . Puisque la pression dépend de l'altitude selon les équations (4.39), (4.41) et (4.43), on peut alors déterminer l'altitude de transition h_{trans} à partir de la pression p_{trans} .

Étant donné que la variation de la pression en fonction de l'altitude dépend de la position de l'avion par rapport à la tropopause, on doit alors déterminer si h_{trans} se trouve au-dessus ou en-dessous de $h_{\text{tropopause}}$. Comme la pression décroît en fonction de l'altitude, on peut alors déduire que :

- Si $p_{\text{trans}} < p_{\text{tropopause}}$, alors $h_{\text{trans}} > h_{\text{tropopause}}$ et on utilise l'équation (4.43) pour déterminer h_{trans} . Si on utilise la valeur de p_{trans} trouvée après avoir remplacé l'équation (6.7) dans l'équation (4.43), on obtient alors

$$\frac{p_{\text{trans}}}{p_{\text{tropopause}}} = \exp \left[- \left(\frac{g}{R T_{\text{tropopause}}} \right) (h_{\text{trans}} - h_{\text{tropopause}}) \right], \quad (6.8)$$

d'où on tire

$$h_{\text{trans}} = - \ln \left(\frac{p_{\text{trans}}}{p_{\text{tropopause}}} \right) \frac{R T_{\text{tropopause}}}{g} + h_{\text{tropopause}}. \quad (6.9)$$

- Si $p_{\text{trans}} > p_{\text{tropopause}}$, alors $h_{\text{trans}} < h_{\text{tropopause}}$ et on utilise l'équation (4.39) pour déterminer h_{trans} . Si on utilise la valeur de p_{trans} trouvée après avoir remplacé l'équation (6.7) dans l'équation (4.39), on obtient alors

$$\frac{p_{\text{trans}}}{(p_0)_{\text{ISA}}} = \left(\frac{T_{e_{\text{trans}}}}{(T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}}} \right)^{-\frac{g}{k_T R}}, \quad (6.10)$$

d'où on tire

$$T_{e_{\text{trans}}} = \left(\frac{p_{\text{trans}}}{(p_0)_{\text{ISA}}} \right)^{-\frac{R k_T}{g}} [(T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}}]. \quad (6.11)$$

En utilisant cette expression de $T_{e_{\text{trans}}}$ dans l'équation (4.38), on trouve la valeur de l'altitude de transition h_{trans} , qui est donnée par la relation

$$h_{\text{trans}} = \frac{T_{e_{\text{trans}}} - (T_0)_{\text{ISA}} - \Delta T_{\text{ISA}}}{k_T}. \quad (6.12)$$

Dans Nuic (2009), on donne l'altitude de transition h_{trans} qui est donnée par l'équation (6.12) sans donner le cas où $h_{\text{trans}} > h_{\text{tropopause}}$ qu'on a présenté à l'équation (6.9). Or, à la figure 6.1, on peut constater que l'altitude de transition peut être supérieure à l'altitude de la tropopause si on prend par exemple $V_{\text{CAS}} = 250$ nœuds et $M = 0,85$.

6.3 Analyse des phases de montée initiale et de descente finale

Pour déterminer la vitesse, l'altitude et la masse de l'avion ainsi que le coût total du vol en tout point entre N_{fc} et N_F ou entre N_D et N_{dc} , on doit discrétiser le système d'équations (5.18). L'expression des fonctions f_V, f_h, f_m et f_C dépend de l'état du vol.

Dans le cas de la descente finale, les différents états possibles du vol se résument comme suit :

- 1D : décélération à une altitude constante de 10 000 pieds pour atteindre une vitesse V_{CAS} de 250 nœuds ;
- 2D : descente à vitesse V_{CAS} constante sous la tropopause ;
- 3D : descente à nombre de Mach constant sous la tropopause ;
- 4D : descente à vitesse V_{CAS} constante au-dessus de la tropopause ;
- 5D : descente à nombre de Mach constant au-dessus de la tropopause ;
- 6D : altitude h_{fc} et vitesse V_{fc} constantes en croisière.

Dans le cas de la montée initiale, les états de vol possibles sont les suivants :

- 1M : altitude h_{dc} et vitesse V_{dc} constantes en croisière ;
- 2M : montée à nombre de Mach constant au-dessus de la tropopause ;
- 3M : montée à vitesse V_{CAS} constante au-dessus de la tropopause ;
- 4M : montée à nombre de Mach constant sous la tropopause ;
- 5M : montée à vitesse V_{CAS} constante sous la tropopause ;
- 6M : accélération à une altitude constante de 10 000 pieds pour atteindre une vitesse V_{CAS} de montée.

Pour calculer le coût d'un arc en phase de descente finale ou de montée initiale, il faut connaître le profil V_{CAS}/M à utiliser. Étant donné ce profil, on détermine l'altitude de transition h_{trans} qui est donnée par l'équation (6.9) ou (6.12). Si $h_{trans} \notin [h_F, h_{fc}]$ ou $h_{trans} \notin [h_D, h_{dc}]$, alors le profil V_{CAS}/M choisi est impossible et l'arc choisi est irréalisable. Dans les autres cas, l'ordre des états possibles pour le calcul du coût de cet arc est alors déterminé par la position de h_{trans} par rapport à $h_{tropopause}$:

Descente finale :

- Si $h_{trans} < h_{tropopause} < h_{fc}$, le calcul du coût de l'arc se fait selon l'ordre des états :
1D \rightarrow 2D \rightarrow 3D \rightarrow 5D \rightarrow 6D ;
- Si $h_{trans} < h_{fc} < h_{tropopause}$, le calcul du coût de l'arc se fait selon l'ordre des états :
1D \rightarrow 2D \rightarrow 3D \rightarrow 6D ;

- Si $h_{\text{tropopause}} < h_{\text{trans}} < h_{fc}$, le calcul du coût de l'arc se fait selon l'ordre des états :
1D \rightarrow 2D \rightarrow 4D \rightarrow 5D \rightarrow 6D.

Montée initiale :

- si $h_{\text{trans}} < h_{\text{tropopause}} < h_{dc}$, le calcul du coût de l'arc se fait selon l'ordre des états :
1M \rightarrow 2M \rightarrow 4M \rightarrow 5M \rightarrow 6M ;
- si $h_{\text{trans}} < h_{dc} < h_{\text{tropopause}}$, le calcul du coût de l'arc se fait selon l'ordre des états :
1M \rightarrow 4M \rightarrow 5M \rightarrow 6M ;
- si $h_{\text{tropopause}} < h_{\text{trans}} < h_{dc}$, le calcul du coût de l'arc se fait alors selon l'ordre des états : 1M \rightarrow 2M \rightarrow 3M \rightarrow 5M \rightarrow 6M.

Pour déterminer l'expression des fonctions f_V, f_h, f_m et f_C , on doit calculer la poussée du moteur dans chacun des 12 états.

6.4 Détermination de f_V, f_h, f_m et f_C

Dans cette section, on détermine la forme des quatre fonctions pour chacun des 12 états du vol. Les équations (5.14) et (5.16) donnent l'expression de f_V en fonction de $\frac{dV}{dt}$ et celle de f_h en fonction de $\frac{dh}{dt}$. Les états 1D, 6D, 1M et 6M sont à altitude constante, $\frac{dh}{dt}$ est donc nulle et $f_h = 0$ dans ces cas. Les états 6D et 1M sont à vitesse constante, $\frac{dV}{dt}$ est donc nulle et $f_V = 0$. Par contre, dans l'état 1D, on a une décélération et $\frac{dV}{dt}$ est donnée par l'équation (5.28). Cependant, dans l'état 6M, on a une accélération et $\frac{dV}{dt}$ est donnée par l'équation (5.27).

Pour les autres états, de 2D à 5D et de 2M à 5M, on a un changement d'altitude et donc $\frac{dh}{dt}$ est non nulle. On doit déterminer $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{dm}{dt}$ pour chacun de ces états.

6.4.1 Expression de $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{dm}{dt}$ pour les états 2D à 5D

Puisque la descente se fait à vitesse V_{CAS} constante sous l'altitude de transition et à un nombre de Mach M constant au-dessus de cette altitude, elle est accompagnée d'un changement de la vitesse propre V . On doit donc déterminer $\frac{dh}{dt}$ et $\frac{dV}{dt}$ pour chacun de ces états. D'après le rapport de Nuic (2009), l'énergie de l'avion disponible est partagée entre le changement d'altitude et le changement de vitesse, et le taux instantané de descente $\frac{dh}{dt}$ est donné par l'équation (5.25). À partir de l'équation (4.10), on peut déduire que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T_{\text{max,des}} - D}{m} - \frac{g}{V} \frac{dh}{dt}. \quad (6.13)$$

Si on substitue l'équation (5.25) dans l'équation (6.13), on obtient alors

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{T_{\max, \text{des}} - D}{m} \right] (1 - ESF(M)). \quad (6.14)$$

L'équation (5.26) donne l'expression de $ESF(M)$ dans le cas d'un changement d'altitude à un nombre M constant, soit dans les états 3D et 5D. D'après Nuic (2009), lors d'un changement d'altitude à une vitesse V_{CAS} constante, l'expression de $ESF(M)$ dépend de la position de l'avion par rapport à l'altitude de la tropopause $h_{\text{tropopause}}$:

— si $h < h_{\text{tropopause}}$, $ESF(M)$ est alors donné par

$$ESF(M) = \left[1 + \frac{\gamma R k_T}{2g} M^2 + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \right]^{-1}; \quad (6.15)$$

— si $h > h_{\text{tropopause}}$, $ESF(M)$ est alors donné par

$$ESF(M) = \left[1 + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \right]^{-1}. \quad (6.16)$$

En utilisant ces équations et la poussée maximale de l'avion selon l'état du vol donnée au tableau 5.2, on peut déterminer les expressions de f_h et de f_V pour tous les états de la descente finale.

Pour déterminer f_C et f_m , on doit calculer $\frac{dm}{dt} = -FF$ pour chaque état. Si on est à l'état 6D, le débit massique de carburant FF est alors égal à FF_{cr} qui est donné par l'équation (4.31). Pour les autres états (1D à 5D), le débit massique de carburant est donné par

$$\frac{dm}{dt} = -\min\{FF_{\text{nominal}}, FF_{\text{min}}\}, \quad (6.17)$$

où l'expression de FF_{nominal} est donnée par l'équation (4.28) et l'expression de FF_{min} est donnée par l'équation (4.30).

6.4.2 Expression de $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{dm}{dt}$ pour les états 2M à 5M

Puisque la montée se fait à vitesse V_{CAS} constante sous l'altitude de transition et un nombre de Mach M constant au-dessus de cette altitude, elle est accompagnée d'un changement de la vitesse propre V . On doit donc déterminer $\frac{dh}{dt}$ et $\frac{dV}{dt}$ pour chacun de ces états. D'une façon similaire à la phase de descente finale présentée à la section précédente, l'énergie de l'avion disponible est partagée entre le changement d'altitude et le changement de vitesse. Pour réduire les coûts et améliorer la durée de vie des moteurs, on utilise une réduction de la

poussée maximale de l'avion en phase de montée. Le taux instantané de montée prend donc la forme

$$\frac{dh}{dt} = \left[\frac{(T_{\max, \text{climb}} - D) V C_{\text{pow,red}}}{mg} \right] ESF(M), \quad (6.18)$$

et le taux instantané de changement de vitesse prend la forme

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{(T_{\max, \text{climb}} - D) C_{\text{pow,red}}}{m} \right] (1 - ESF(M)), \quad (6.19)$$

où $C_{\text{pow,red}}$ est le facteur de réduction de la poussée pour la phase de montée. $C_{\text{pow,red}}$ est une fonction de la masse maximale de l'avion m_{\max} , de la masse minimale m_{\min} , de la masse à l'instant t , m et du coefficient de réduction C_{red} qui est donné par

$$C_{\text{pow,red}} = 1 - C_{\text{red}} \frac{m_{\max} - m}{m_{\max} - m_{\min}}. \quad (6.20)$$

D'après Nuic (2009), C_{red} dépend de l'altitude et du type de l'avion. Pour un avion de type jet,

$$C_{\text{red}} = \begin{cases} 0,15 & \text{si } h < 0,8 h_{\max}; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.21)$$

où h_{\max} est l'altitude maximale qui est donnée par la relation

$$h_{\max} = \min [h_{\text{MO}}, h_{\max \text{ ISA}} + G_t (\Delta T_{\text{ISA}} - C_{\text{Tc},4}) + G_w (m_{\max} - m)]. \quad (6.22)$$

Les constantes de l'équation (6.22), qui sont données dans les tables BADA, doivent respecter les conditions suivantes :

$$G_w \geq 0;$$

$$G_t \leq 0;$$

$$\text{si } \Delta T_{\text{ISA}} - C_{\text{Tc},4} < 0, \text{ on pose alors } \Delta T_{\text{ISA}} - C_{\text{Tc},4} = 0.$$

L'expression de $ESF(M)$ dépend de l'état du vol et est donnée par :

- l'équation (5.26), dans le cas d'un changement d'altitude à nombre M constant, soit dans les états 2M et 4M ;
- l'équation (6.15), dans le cas d'un changement d'altitude à vitesse V_{CAS} constante sous de la tropopause, soit dans l'état 5M ;
- l'équation (6.16), dans le cas d'un changement d'altitude à vitesse V_{CAS} constante au-dessus de la tropopause, soit dans l'état 3M.

En utilisant ces équations, on peut déterminer l'expression de f_h et de f_V pour tous les états de la montée initiale.

Pour déterminer f_C et f_m , on doit calculer $\frac{dm}{dt} = -FF$. Dans le cas de vitesse et d'altitude constantes (état 1M), le débit massique de carburant est FF_{cr} qui est donné par l'équation (4.31). Dans les autres cas (états 2M à 6M), on utilise

$$\frac{dm}{dt} = -FF_{\text{nominal}}, \quad (6.23)$$

où l'expression de FF_{nominal} est donnée par l'équation (4.28).

Puisque f_C et f_m sont des fonctions de la poussée de l'avion, on doit alors savoir calculer la poussée pour chaque état. On utilise les résultats résumés dans le tableau 5.2 pour calculer la poussée maximale selon l'état du vol.

6.5 Algorithme de calcul à rebours du coût d'un arc

Pour calculer le coût d'un arc en phase de descente finale, on a les données suivantes :

- les coordonnées du nœud $N_F, (x_F, y_F, h_F)$;
- les coordonnées du nœud $N_{fc}, (x_{fc}, y_{fc}, h_{fc})$;
- la masse de l'avion m_F au nœud N_F , qui est la masse finale de l'avion incluant le carburant de réserve moins la masse de carburant nécessaire pour l'atterrissage ;
- la vitesse CAS de la descente $V_{\text{CAS,des}}$;
- la vitesse propre de l'avion V_F , qui correspond à $V_{\text{CAS}} = 250$ nœuds ;
- les données de la météo pour cet arc (les composantes de la vitesse du vent, ΔT_{ISA}).

On doit calculer :

- la vitesse propre de l'avion V_{fc} au nœud N_{fc} , qui est la vitesse optimale à l'altitude h_{fc} ;
- la vitesse, l'altitude et la masse de l'avion en tout point de l'arc ;
- la masse de l'avion m_{fc} au nœud N_{fc} ;
- le coût total de l'arc $C(N_{fc})$ ainsi que le temps t nécessaire pour le parcourir.

Pour calculer le coût d'un arc en phase de montée initiale, on a les données suivantes :

- les coordonnées du nœud $N_D, (x_D, y_D, h_D)$;
- les coordonnées du nœud $N_{dc}, (x_{dc}, y_{dc}, h_{dc})$;
- la masse de l'avion m_{dc} au nœud N_{dc} , qui est la masse finale de l'avion obtenue du calcul de la trajectoire qui précède N_{dc} ;
- la vitesse propre de l'avion V_{dc} au nœud N_{dc} ;
- la vitesse CAS de la montée $V_{\text{CAS,mont}}$;
- la vitesse propre de l'avion V_D , qui correspond à $V_{\text{CAS}} = 250$ nœuds ;
- les données de la météo pour cet arc (les composantes de la vitesse du vent, ΔT_{ISA}).

On doit déterminer :

- la vitesse, l'altitude et la masse de l'avion en tout point de l'arc ;
- la masse de l'avion m_D au nœud N_D ;
- le coût total de l'arc $C(N_D) - C(N_{dc})$ ainsi que le temps t nécessaire pour le parcourir.

De façon similaire à ce qui a été fait au chapitre 5, la détermination de ces quantités passe par les étapes suivantes :

1. Calculs préliminaires :

Calcul de la vitesse optimale pour l'arc de descente : on calcule la vitesse V_{fc} qui est la vitesse optimale à l'altitude h_{fc} . Cette vitesse maximise la distance spécifique SR donnée par l'équation (5.31), en utilisant la masse m_F et la valeur de CI ;

Détermination du nombre de Mach de la descente et de la montée : on détermine le nombre de Mach de la descente M qui correspond à la vitesse optimale V_{fc} à l'altitude h_{fc} pour la descente et qui correspond à la vitesse V_{dc} à l'altitude h_{dc} pour la montée ;

Détermination de la vitesse V'_1 pour la descente : on calcule V'_1 , qui correspond à $V_{CAS,des}$ à l'altitude de 10 000 pieds ;

Calcul de l'altitude de transition : on calcule l'altitude de transition h_{trans} pour le profil V_{CAS}/M ;

Calcul de U : on calcule la distance horizontale de l'arc ;

Choix des tailles de pas : pour parcourir cette distance on utilisera quatre tailles de pas distinctes notées *pas-cst*, *pas-des*, *pas-CAS* et *pas-M*. Elles seront utilisées comme suit :

- *pas-cst* = 20 000 m, lorsque la vitesse et l'altitude sont constantes (états 6D et 1M) ;
- *pas-des* = 2000 m, lorsqu'on a une décélération à altitude constante (états 1D et 6M) ;
- *pas-CAS* = 500 m, lorsqu'on a un changement d'altitude à une vitesse V_{CAS} constante (états 2D, 4D, 3M et 5M) ;
- *pas-M* = 1000 m, lorsqu'on a un changement d'altitude à un nombre de Mach M constant (états 3D, 5D, 2M et 4M).

On fait ici une discrétisation plus fine pour la descente et la montée à V_{CAS} constante car $ESF(M)$ est variable dans ce cas ;

Initialisation des variables : on initialise les variables comme suit :

- on associe à m, V et h leurs valeurs aux points N_{dc} et N_F pour les arcs de montée initiale et de descente finale respectivement ;
- $C = 0$;
- $u = U$;

2. Calcul des coûts :

Le deuxième point est similaire au deuxième point dans le cas d'un arc en croisière. On parcourt l'arc en utilisant la variable u . En fonction de l'état de vol, on choisit la taille appropriée du pas ainsi que le système d'équations à discrétiser à l'aide de la méthode RK-4. À la fin de chaque évaluation, on met à jour la valeur de u , c'est-à-dire $u \leftarrow u + \text{pas}$. On répète cette procédure jusqu'à l'obtention de $u = 0$. On utilise un pas négatif car le calcul se fait à rebours.

Le calcul du coût d'un arc de descente finale est composé principalement de trois étapes. La première étape est une étape de changement de vitesse suivie d'une étape de changement d'altitude et enfin une étape à altitude et vitesse constantes. À la fin de la deuxième étape, on obtient le point du début de la descente (TOD pour *Top Of Descent* en anglais). Le point du TOD est détecté directement par l'algorithme, car il représente la fin d'une étape.

Le calcul du coût d'un arc de montée initiale est aussi composé de trois étapes. On a une première étape à altitude et vitesse constantes suivie d'une étape de changement d'altitude et enfin une étape de changement de vitesse. La fin de la troisième étape devrait être au point N_D . Il faut donc connaître le point de la fin de la montée (TOC pour *Top Of Climb* en anglais). Ce point définit la fin de la première étape et le début de la deuxième. Dans le cas de calcul à rebours, il est important de connaître la position spatiale de ce point. Pour déterminer cette position, il faut connaître la distance nécessaire pour effectuer les deux dernières étapes. Le problème ici est que la distance nécessaire pour la montée dépend de la masse initiale et cette masse n'est pas connue. Pour déterminer cette distance, on utilise une méthode itérative. Cette méthode consiste à déterminer la distance d_{cons} nécessaire pour parcourir la première étape et une valeur ϵ_d pour borner la distance maximale qui sépare le point de la fin de la troisième étape et point N_D .

6.5.1 Étapes de calcul du coût pour un arc en descente finale

Le vol sur un arc de descente finale est composé de trois étapes :

- Première étape (ajustement de la vitesse) :
Si $V = V_1'$ et $h = h_F$, alors on passe à la seconde étape ;

- Si $V < V'_1$ et $h = h_F$, alors on décélère jusqu'à ce que V soit égal à V'_1 . L'égalité $V = V'_1$ est toujours obtenue à la fin de la première étape ;
- Seconde étape (ajustement de l'altitude) :
 Si $h = h_{fc}$, alors on passe à la troisième étape ;
 Si $h < h_{fc}$, alors on a une étape de descente jusqu'à ce que h soit égal à h_{fc} . L'égalité $h = h_{fc}$ est toujours obtenue à la fin de la seconde étape ;
 - Troisième étape (déplacement à altitude et vitesse constantes) :
 À ce point-ci, $h = h_{fc}$ et $V = V_{fc}$. On vole à altitude constante jusqu'à ce que le point N_{fc} soit atteint.

6.5.2 Étapes de calcul du coût pour un arc en montée initiale

On utilise une méthode itérative pour déterminer le TOC. La première itération consiste à exécuter ces deux étapes :

- Première étape (ajustement de l'altitude) :
 Si $h = h_D$, alors on passe à la deuxième étape ;
 Si $h > h_D$, alors on a une étape de montée jusqu'à ce que h soit égal à h_D ; L'égalité $h = h_D$ est toujours obtenue à la fin de la première étape ;
- Deuxième étape (ajustement de la vitesse) :
 Si $(V = V_D \text{ et } h = h_D)$, alors la seconde étape est finie ;
 Si $(V > V_D \text{ et } h = h_D)$, alors on a une étape d'accélération jusqu'à ce que V soit égal à V_D ; L'égalité $(V = V_D \text{ et } h = h_D)$ est toujours obtenue à la fin de la deuxième étape.

À la fin de cette première itération, on a deux cas possibles. Le premier cas est qu'on n'atteint pas le point N_D , c'est-à-dire la distance U n'est pas suffisante pour exécuter ces deux étapes. Dans ce cas, cet arc est irréalisable. Au deuxième cas, l'arc est réalisable et à la fin de la deuxième étape $u > 0$. La distance nécessaire pour les deux premières étapes est donc $d_{\text{mont}} := U - u$. La valeur de u obtenue devrait être la distance à parcourir à altitude et vitesse constantes avant la première étape. Si on utilise cette distance pour exécuter une étape à altitude et vitesse constantes, la masse de l'avion à la fin de la montée sera plus grande que m_{dc} et la distance nécessaire pour la montée sera aussi plus grande que d_{mont} et ce proportionnellement à la grandeur de u . On doit donc utiliser une proportion $pr \in [0, 1]$ de u pour l'étape préliminaire à altitude et vitesse constantes avant le TOC. Dans ce cas, on définit la distance à parcourir à altitude et vitesse constantes $d_{\text{cons}} := pr \cdot u$. Les étapes du vol seront :

- Première étape (déplacement à altitude et vitesse constantes) :
 À ce point-ci, $h = h_{dc}$ et $V = V_{dc}$;

- On vole à altitude et vitesse constantes pour une distance d_{cons} ;
- Deuxième étape (ajustement de l'altitude) :
 - Si $h = h_D$, alors on passe à la troisième étape ;
 - Si $h > h_D$, alors on a une étape de montée jusqu'à ce que h soit égal à h_D . L'égalité $h = h_D$ est toujours obtenue à la fin de la deuxième étape ;
- Troisième étape (ajustement de la vitesse) :
 - Si $V = V_D$, alors la troisième étape est finie ;
 - Si $V > V_D$, alors on a une étape d'accélération jusqu'à ce que V soit égal à V_D . L'égalité $V = V_D$ est toujours obtenue à la fin de la troisième étape.

Si $u > \epsilon_d$, alors $d_{\text{cons}} \leftarrow d_{\text{cons}} + pr \ u$ et on exécute encore une fois les trois dernières étapes. On répète cette procédure jusqu'à l'obtention de $u < \epsilon_d$.

On doit déterminer les valeurs de ϵ_d et de pr qui donnent des résultats réalistes et un temps d'exécution court. On a utilisé $\epsilon_d = 100$ m, car la consommation de l'avion pour une distance de 100 m est négligeable. De plus, le temps nécessaire pour parcourir 100 m est inférieur à une seconde. Pour déterminer la valeur de pr , on a essayé tous les scénarios possibles de montée en utilisant différentes valeurs possibles de U . On a constaté que si la valeur de pr est grande, le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer le TOC est alors petit mais on peut dépasser le point N_D sans atteindre l'altitude de 10 000 pieds. Si on utilise une petite valeur de pr , alors on ne risque pas de dépasser N_D pour atteindre l'altitude de 10 000 pieds mais le nombre d'itérations nécessaire pour trouver le TOC sera grand. On doit donc déterminer la plus grande valeur de pr qui nous permet d'atteindre l'altitude de 10 000 pieds sans dépasser le point N_D . Après l'analyse de tous les résultats des scénarios simulés, on a constaté que $pr = 0,6$ est la meilleure valeur pour trouver le TOC. Cette valeur permet de trouver le TOC en deux ou trois itérations.

On choisit la taille de pas appropriée à chacune des étapes du vol sur un arc. On détermine les valeurs de V, h, m et C à la fin de chaque pas en résolvant le système d'équations différentielles approprié. Pour la discrétisation du système d'équations différentielles, on utilise la méthode RK-4.

6.5.3 Choix de la taille de pas pour chaque état

Pour chacun des états décrits au début de cette section, on doit choisir la taille du pas appropriée. En utilisant les mêmes conditions définies pour un arc en croisière au chapitre 5, les tailles des pas utilisées sont résumées au tableau 6.1 pour un arc en montée initiale et au tableau 6.2 pour un arc en descente finale. Par exemple, pour l'état 6M qui est une étape de changement de vitesse, il faut s'assurer que la taille du pas ne soit pas supérieure à u pour ne pas dépasser le point N_D et qu'elle ne soit pas supérieure à $|(V_D - V)/(dV/du)|$ pour ne

pas dépasser la vitesse V_D . La taille du pas est définie par

$$pas := -\min \left(pas-acc, u, \left| \frac{V_D - V}{dV/du} \right| \right).$$

Tableau 6.1 Choix de la taille du pas en phase de montée initiale.

État du vol	Taille du pas utilisée
état 1M	$pas := -d_{cons}$
état 2M ($h_{trans} < h_{tropopause}$)	$pas := -\min \left(pas-M, u, \left \frac{(h_{tropopause} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 2M ($h_{trans} > h_{tropopause}$)	$pas := -\min \left(pas-M, u, \left \frac{(h_{trans} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 3M	$pas := -\min \left(pas-CAS, u, \left \frac{(h_{tropopause} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 4M	$pas := -\min \left(pas-M, u, \left \frac{(h_{trans} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 5M	$pas := -\min \left(pas-CAS, u, \left \frac{(h_D - h)}{dh/du} \right \right)$
état 6M	$pas := -\min \left(pas-acc, u, \left \frac{V_D - V}{dV/du} \right \right)$

6.5.4 Coût d'un arc de décélération en phase de descente finale (état 1D)

Cette étape consiste à décélérer de la vitesse V'_1 qui correspond à $V_{CAS,des}$ à l'altitude $h_F = 10\,000$ pieds pour finir à la vitesse V_F . Pour cette étape, $\frac{dh}{dt} = 0$, l'expression de $\frac{dV}{dt}$ est donnée par l'équation (5.28) et celle de $\frac{dm}{dt}$ est donnée par l'équation (6.17). Si on substitue ces équations dans le système d'équations différentielles (5.18), on obtient alors :

Tableau 6.2 Choix de la taille du pas en phase de descente finale.

État du vol	Taille du pas utilisée
état 1D	$pas := -\min \left(pas-acc, u, \left \frac{V'_1 - V}{dV/du} \right \right)$
état 2D ($h_{trans} < h_{tropopause}$)	$pas := -\min \left(pas-CAS, u, \left \frac{(h_{trans} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 2D ($h_{trans} > h_{tropopause}$)	$pas := -\min \left(pas-CAS, u, \left \frac{(h_{tropopause} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 3D ($h_{fc} < h_{tropopause}$)	$pas := -\min \left(pas-M, u, \left \frac{(h_{fc} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 3D ($h_{fc} > h_{tropopause}$)	$pas := -\min \left(pas-M, u, \left \frac{(h_{tropopause} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 4D	$pas := -\min \left(pas-CAS, u, \left \frac{(h_{trans} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 5D	$pas := -\min \left(pas-M, u, \left \frac{(h_{fc} - h)}{dh/du} \right \right)$
état 6D	$pas := -\min (pas-cst, u)$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\
\frac{dh}{du} = 0; \frac{dV}{du} = \max \left\{ \frac{-0,6096}{V_G}, \frac{-D/m}{V_G} \right\}; \\
T = \frac{dV}{du} m V_G + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\
\frac{dm}{du} = \min \left\{ -\frac{1}{V_G} \left[C_{f3} \left(1 - \frac{h}{C_{f4}} \right) \right], -\frac{1}{V_G} \left[C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right] \right\}; \\
\frac{dC}{du} = \max \left\{ \frac{1}{V_G} \left[CI + C_{f3} \left(1 - \frac{h}{C_{f4}} \right) \right], \frac{1}{V_G} \left[CI + C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right] \right\}.
\end{array} \right. \quad (6.24)$$

On utilise une fonction appelée **rk4-acc-des**¹ pour résoudre le système d'équations différentielles (6.24).

1. L'utilisation des fonctions rk-4 est décrite dans le pseudo-code à la section 6.5.8.

6.5.5 Coût d'un arc d'accélération en phase de montée initiale (état 6M)

Cette étape consiste à accélérer de la vitesse V_D pour finir à la vitesse $V_{CAS, \text{mont}}$ à l'altitude $h_D = 10\,000$ pieds. Pour cette étape $\frac{dh}{dt} = 0$, l'expression de $\frac{dV}{dt}$ est donnée par l'équation (5.27) et celle de $\frac{dm}{dt}$ est donnée par l'équation (6.23). Si on substitue ces équations dans le système d'équations différentielles (5.18), on obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = 0; \quad \frac{dV}{du} = \min \left\{ 0,6096; \frac{T_{\max} - D}{m} \right\}; \\ T = \frac{dV}{du} m V_G + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = -\frac{1}{V_G} \left[C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right]; \\ \frac{dC}{du} = \frac{1}{V_G} \left[CI + C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right]. \end{array} \right. \quad (6.25)$$

On utilise une fonction appelée `rk4-acc-mont` pour résoudre le système d'équations différentielles (6.25).

6.5.6 Coût d'un arc de descente en phase de descente finale (états 2D à 5D)

Cette étape consiste à descendre de l'altitude h_{fc} pour atteindre l'altitude h_F . Dans ce cas, la poussée utilisée est nulle ou proche de zéro. Le débit massique nominal du carburant FF_{nominal} peut être inférieur au débit massique minimal FF_{min} . L'expression de $\frac{dm}{dt}$ est donc donnée par l'équation (6.17) et le système d'équations différentielles (5.18) prend la forme particulière

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{1 + (dh/du)^2} \sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = \frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}; \quad \frac{dV}{du} = \frac{dV}{dt} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G}; \\ T = \frac{m g (dh/du)}{V \sqrt{V_G^2 + (dh/du)^2}} + \frac{dV}{du} \frac{m V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = \min \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [C_{f1} (1 + \frac{V}{C_{f2}}) T]; \\ -\frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [C_{f3} (1 - \frac{h}{C_{f4}})]; \end{array} \right. \\ \frac{dC}{du} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [CI + C_{f1} (1 + \frac{V}{C_{f2}}) T]; \\ \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} [CI + C_{f3} (1 - \frac{h}{C_{f4}})], \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.26)$$

où dh/dt et dV/dt sont donnés par les équations (5.25) et (6.14) respectivement. Ces équations dépendent de $T_{\max, \text{des}}$ et de $ESF(M)$. La forme de $T_{\max, \text{des}}$ est donnée par la quatrième et la cinquième ligne du tableau 5.2 et ce, selon la valeur de h . L'expression de $ESF(M)$ et les noms des fonctions utilisées pour résoudre le système d'équations différentielles (6.26) sont résumés au tableau 6.3.

Tableau 6.3 Expression de $ESF(M)$ et nom de la fonction RK-4 utilisée en fonction de l'état du vol en phase de descente finale.

État du vol	Expression de $ESF(M)$	Nom de la fonction RK-4 utilisée
état 2D	équation (6.15)	rk4-desc-CAS-bas
état 3D	deuxième équation de (5.26)	rk4-desc-M-bas
état 4D	équation (6.16)	rk4-desc-CAS-haut
état 5D	première équation de (5.26)	rk4-desc-M-haut

6.5.7 Coût d'un arc de montée en phase de montée initiale (états 2M à 5M)

Cette étape consiste à monter de l'altitude h_D jusqu'à l'altitude h_{dc} . Dans ce cas, la valeur de la poussée utilisée est proche de la poussée maximale des moteurs. On utilise donc le débit massique nominal de carburant pour calculer $\frac{dm}{dt}$. L'expression de $\frac{dm}{dt}$ est donnée par l'équation (6.23) et le système d'équations différentielles (5.18) prend la forme particulière

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_1) V_{w,x} + \sin(\theta_1) V_{w,y}}{\sqrt{1 + (dh/du)^2} \sqrt{V_{w,x}^2 + V_{w,y}^2}}; V_G = V_w \cos \theta + \sqrt{V^2 - V_w^2 (1 - \cos^2(\theta))}; \\ \frac{dh}{du} = \frac{dh/dt}{\sqrt{V_G^2 - (dh/dt)^2}}; \quad \frac{dV}{du} = \frac{dV}{dt} \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G}; \\ T = \frac{m g (dh/du)}{V \sqrt{V_G^2 + (dh/du)^2}} + \frac{dV}{du} \frac{m V_G}{\sqrt{1 + (dh/du)^2}} + C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S}; \\ \frac{dm}{du} = - \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \left[C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right]; \\ \frac{dC}{du} = \frac{\sqrt{1 + (dh/du)^2}}{V_G} \left[CI + C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T \right], \end{array} \right. \quad (6.27)$$

où dh/dt et dV/dt sont donnés par les équations (6.18) et (6.19) respectivement. Ces équations dépendent de $T_{\max, \text{climb}}$ et de $ESF(M)$. La forme de $T_{\max, \text{climb}}$ est donnée par la deuxième ligne du tableau 5.2. D'une manière équivalente au calcul des coûts d'un arc en phase descente finale présentée à la section précédente, l'expression de $ESF(M)$ et les noms des fonctions utilisées

Tableau 6.4 Expression de $ESF(M)$ et nom de la fonction RK-4 utilisée en fonction de l'état du vol en phase de montée initiale.

État du vol	Expression de $ESF(M)$	Nom de la fonction RK-4 utilisée
état 2M	première équation de (5.26)	rk4-mont-M-haut
état 3M	équation (6.16)	rk4-mont-CAS-haut
état 4M	deuxième équation de (5.26)	rk4-mont-M-bas
état 5M	équation (6.15)	rk4-mont-CAS-bas

pour résoudre le système d'équations différentielles (6.27) sont résumés au tableau 6.4.

6.5.8 Pseudo-code de l'algorithme de calcul du coût d'un arc

Le code utilisé pour le calcul du coût d'un arc en phase de descente finale est décrit par le pseudo-code suivant :

```

_____ point 2 de la phase de descente finale _____
tant que (u > 0){
    si(h = 3048 et V < V1'){
        pas = - minimum{u, pas-acc, |(V - V1')/(dV/du)|};
        rk4-acc-des;
    }
    sinon{
        si(h < h_trans){
            pas = - minimum{u, pas-CAS, |(h - h_trans)/(dh/du)|};
            rk4-desc-CAS-haut;
        }
        si(h < h_tropopause){
            pas = - minimum{dist - u, pas-CAS, |(h - h_trans)/(dh/du)|};
            rk4-desc-CAS-bas;
        }
        sinon{
            si(h < h_fc){
                si(h > h_tropopause){
                    pas = - minimum{u, pas-M, |(h - h_fc)/(dh/du)|};
                    rk4-desc-M-haut;
                }
                si(h < h_tropopause){
                    pas = - minimum{dist - u, pas-M, |(h - h_fc)/(dh/du)|};
                    rk4-desc-M-bas;
                }
            }
            sinon{
                pas = - minimum{u, pas-cst};
                rk4-cst;
            }
        }
        u = u + pas;
    }
}
si(h < h_fc){
    m = infini;
    C = infini;
}

```

Le code utilisé pour le calcul du coût d'un arc en phase de montée initiale est décrit par le pseudo-code suivant :

```

points 2 et 3 de la phase de montée initiale
d_rest = d_cons = 0;
répéter{                                     % on répète le calcul pour déterminer TOC
    d_cons = d_cons + pr * d_rest;
    pas = - d_cons ;                         % première étape (état 1)
    rk4-cst;
    u > U - d_cons;
    tant que (u > 0){                         % on répète la procédure jusqu'à u = 0
        si(h > h_trans){                     % deuxième étape (état 2 ou 4)
            si(h >= h_tropopause){           % deuxième étape (état 2)
                pas = - minimum{u, pas-M, |(h - h_tropopause)/(dh/du)|};
                rk4-mont-M-haut;
            }
            si(h < h_tropopause){             % deuxième étape (état 4)
                pas = - minimum{dist - u, pas-CAS, |(h - h_D)/(dh/du)|};
                rk4-mont-M-bas;
            } }
        sinon{
            si(h > h_D){                     % deuxième étape (état 3 ou 5)
                si(h >= h_tropopause){         % deuxième étape (état 3)
                    pas = - minimum{u, pas-M, |(h - h_tropopause)/(dh/du)|};
                    rk4-mont-CAS-haut;
                }
                si(h < h_tropopause){           % deuxième étape (état 5)
                    pas = - minimum{dist - u, pas-M, |(h - h_trans)/(dh/du)|};
                    rk4-mont-CAS-bas;
                } }
            sinon{
                si(h = 3048 et V > VD){         % fin de la deuxième étape
                    % troisième étape (état 6)
                    pas = - minimum{u, pas-acc, |(V - VD)/(dV/du)|};
                    rk4-acc-mont;
                }
                sinon{                         % fin de la troisième étape
                    d_rest = u;
                    pas = - u;
                } } }
        u = u + pas;
    }                                         % fin de la boucle sur u
    si(h > h_D ou V > V_D){                   % si on n'atteint pas l'altitude h_D
        m = infini;
        C = infini;
        exit;
    }
}jusqu'à (d_rest < epsilon_d)               % fin de la boucle répéter

```

Comme le cas d'un arc en croisière, le temps de parcours de l'arc t est déterminé à partir du coût total et de la masse consommée de carburant à l'aide de la relation

$$t = \frac{C - (m - m_0)}{CI}, \quad (6.28)$$

où

- m est la masse de carburant au début de l'arc qui est la masse au point N_D dans le cas d'une montée et au point N_{fc} dans le cas d'une descente ;
- m_0 est la masse de carburant au début du calcul qui est égale m_{dc} dans le cas d'une montée et m_F dans le cas d'une descente ;
- C est le coût total de l'arc.

Si, à la fin du calcul du coût d'un arc en phase de descente, on n'atteint pas l'altitude h_{fc} , cet arc est alors non réalisable et on lui associe un coût infini. L'arc est non réalisable et on lui associe un coût infini si

- on n'atteint pas l'altitude h_{fc} dans le cas d'un arc en descente finale ;
- on n'atteint pas l'altitude h_D ou la vitesse V_D dans le cas d'un arc en montée initiale.

6.5.9 Fonction de calcul du coût d'un arc en phase de descente finale et de montée initiale

On utilise les fonctions appelées `CoutArcDes` et `CoutArcMont` pour calculer le coût des arcs en phase de descente finale et de montée initiale respectivement. La fonction `CoutArcDes` donne la masse de l'avion au point N_{fc} ainsi que le temps de parcours de l'arc reliant le point N_{fc} au point N_F . Cependant, la fonction `CoutArcMont` donne la masse de l'avion au point de départ N_D ainsi que le temps de parcours de l'arc qui relie les points N_D et N_{dc} . Les variables de sortie de ces deux fonctions sont les mêmes que celles de la fonction `CoutArc` pour le calcul du coût d'un arc en phase de croisière. Cependant, pour les variables d'entrée, on utilise toutes les variables de la fonction `CoutArc` définies à la section 5.2.6 en ajoutant les variables `VitesseCASDes` et `VitesseCASMont` qui sont les vitesses V_{CAS} utilisées pour la descente et pour la montée respectivement.

6.6 Vérification de la méthode de calcul du coût des arcs en phase de descente finale et de montée initiale

On poursuit dans cette section la vérification de la méthode de calcul effectuée aux chapitres 4 et 5. On présente ici la vérification de la méthode de calcul des arcs en phases de descente finale et de montée initiale.

6.6.1 Comparaison des valeurs calculées avec les valeurs tabulées du fichier B763____.PTF

On a présenté à la section 4.2.2 la comparaison de nos calculs numériques du débit massique de carburant en phase de croisière avec les valeurs données par le fichier des tables

de performance B763___.PTF, disponible sur le site internet d'Eurocontrol (BADA Team (2000a)).

On présente ici la comparaison avec le deuxième et le troisième tableau de ce fichier qui donnent les consommations de carburant en phase de montée initiale et de descente finale. Ces tableaux donnent les résultats d'une montée et d'une descente avec une vitesse $V_{CAS} = 290$ nœuds et un nombre de Mach $M = 0,78$. La vitesse, le taux de descente $\frac{dh}{dt}$ et la consommation instantanée $\frac{dm}{dt}$ sont donnés en fonction de l'altitude entre 0 et 43 000 pieds et la masse de l'avion est $m = 150\,000$ kg sous les conditions atmosphériques ISA. Le deuxième tableau donne aussi le taux de montée en fonction des mêmes altitudes et pour les masses suivantes :

- masse minimale : $m_{\min} = 107\,880$ kg ;
- masse nominale : $m_{\text{nom}} = 150\,000$ kg ;
- masse maximale : $m_{\max} = 181\,400$ kg.

On a utilisé l'équation (6.6) pour déterminer la pression à l'altitude de transition et on a trouvé $p_{\text{trans}} = 28\,909,6$ Pascal. La pression atmosphérique à l'altitude de la tropopause sous les conditions atmosphérique ISA est $p_{\text{tropopause}} = 22\,632$ Pascal. Comme $p_{\text{trans}} > p_{\text{tropopause}}$, l'altitude de transition est donc sous la tropopause. On a utilisé les équations (6.11) et (6.12) pour déterminer successivement Te_{trans} et h_{trans} . On a obtenu $h_{\text{trans}} = 9410,8$ m, ce qui correspond à l'altitude de 30 875 pieds.

Pour valider les calculs de notre algorithme, on a comparé les vitesses propres, les consommations instantanées $\frac{dm}{dt}$ et les taux de montée $\frac{dh}{dt}$ donnés par les tables avec les valeurs calculées avec notre algorithme pour les altitudes comprises entre 10 000 et 43 000 pieds. On a trouvé que les résultats de notre calcul sont égaux à ceux donnés par les tables pour le troisième tableau. On remarque que pour certaines combinaisons de masse/altitude du deuxième tableau, on trouve un taux de montée nul. En fait, on a vérifié ces valeurs et on a constaté que l'avion ne peut pas atteindre ces altitudes lorsque sa masse est assez grande. Les calculs semblent donc être précis.

Cette comparaison a le même objectif que celle qui a été présentée à la section 4.2.2. La correspondance de nos résultats avec les données tabulées permet de nous assurer que notre implémentation des formules ainsi que les unités utilisées sont correctes. On a vérifié ces tables pour toutes les phases de vol. On a pu reproduire tous les résultats. L'implémentation de l'algorithme de calcul des coûts semble donc être précise.

6.6.2 Vérification des résultats numériques de la méthode de calcul du coût

De manière similaire à ce qui a été fait à la section 5.3, on a aussi comparé les résultats du calcul du coût des arcs en phases de descente finale et de montée initiale. Charles Pestieau a

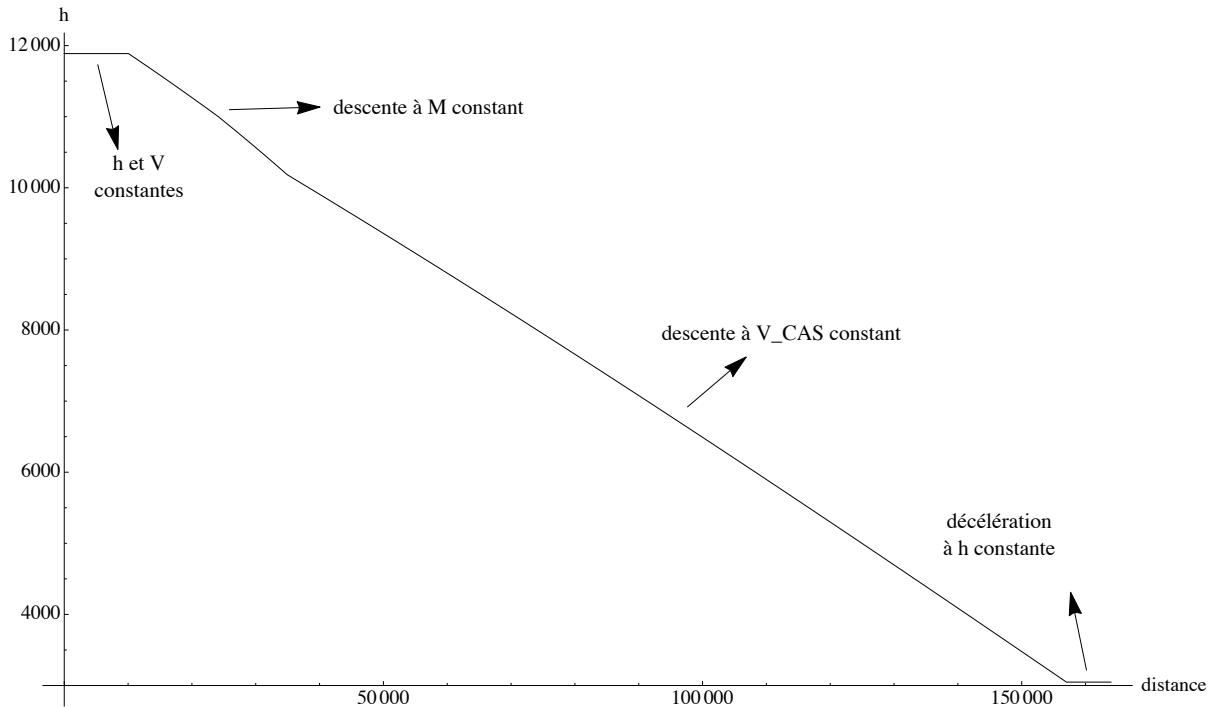


Figure 6.2 Profil de l'altitude h en fonction de la distance parcourue en phase de descente finale.

utilisé la même méthode que celle utilisée pour le calcul du coût d'un arc en phase de croisière pour discrétiser le système d'équations différentielles. On a utilisé les scénarios suivants :

- $h_{fc} < h_{\text{tropopause}}$;
- $h_{\text{tropopause}} < h_{\text{trans}} < h_{fc}$;
- $h_{\text{trans}} < h_{\text{tropopause}} < h_{fc}$;
- $h_{dc} < h_{\text{tropopause}}$;
- $h_{\text{tropopause}} < h_{\text{trans}} < h_{dc}$;
- $h_{\text{trans}} < h_{\text{tropopause}} < h_{dc}$;
- différentes configurations des composantes de la vitesse du vent.

On a comparé la masse de carburant consommé, le temps de parcours et le coût total des arcs considérés. Les résultats des deux méthodes sont identiques lorsqu'on utilise des pas de petite taille. Dans les cas où on a utilisé les tailles de pas utilisées par notre algorithme, on obtient des différences négligeables qui sont comparables à celles trouvées en phase de croisière. Notre implémentation semble donc correcte.

Pour illustrer le comportement de l'algorithme de calcul du coût d'un arc en phase de descente, on a représenté à la figure 6.2 le profil de l'altitude et à la figure 6.3 le profil de la vitesse propre en fonction de la distance parcourue. Pour illustrer le comportement de

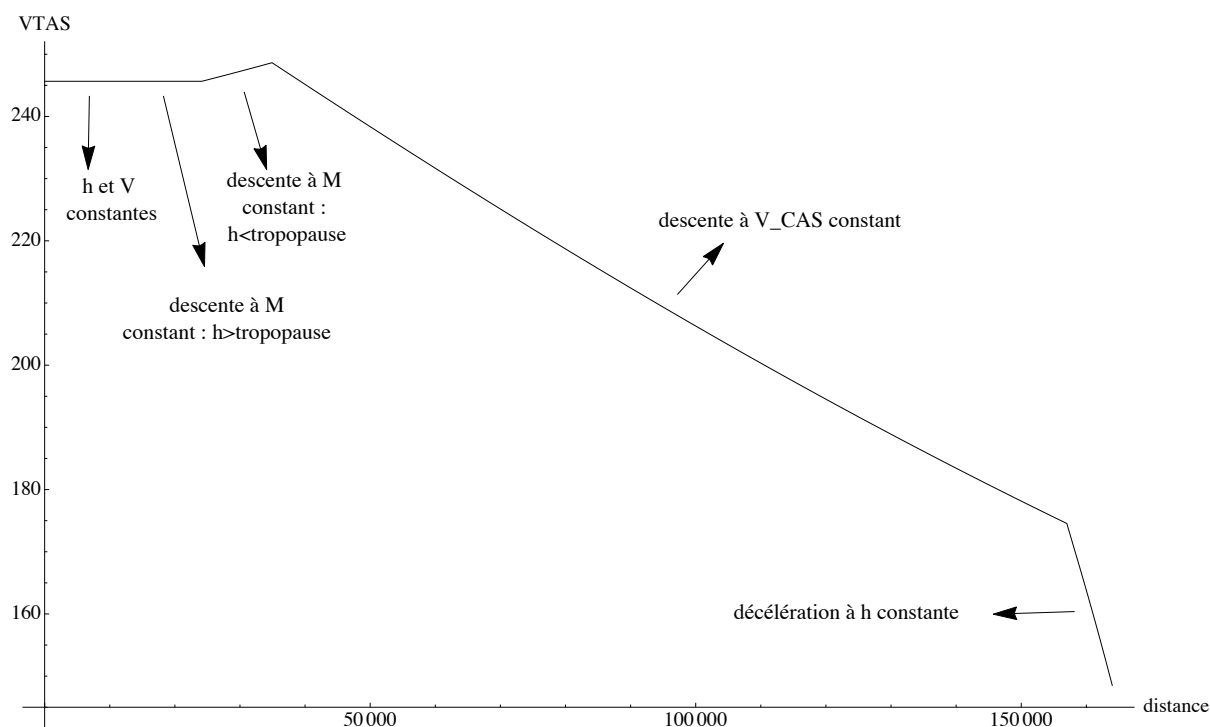


Figure 6.3 Profil de la vitesse propre V en fonction de la distance parcourue en phase de descente finale.

l'algorithme de calcul du coût d'un arc en phase de montée initiale, on a représenté à la figure 6.4 le profil de l'altitude et à la figure 6.5 le profil de la vitesse propre en fonction de la distance parcourue. Ces graphes sont construits en utilisant les sorties de notre programme. On remarque que toutes les étapes sont respectées. On a vérifié aussi toutes les valeurs de V pour chacune des étapes et on a trouvé que la vitesse V_{CAS} est constante pour les états de la montée à V_{CAS} constante et que le nombre M est constant pour les états de la montée à M constant.

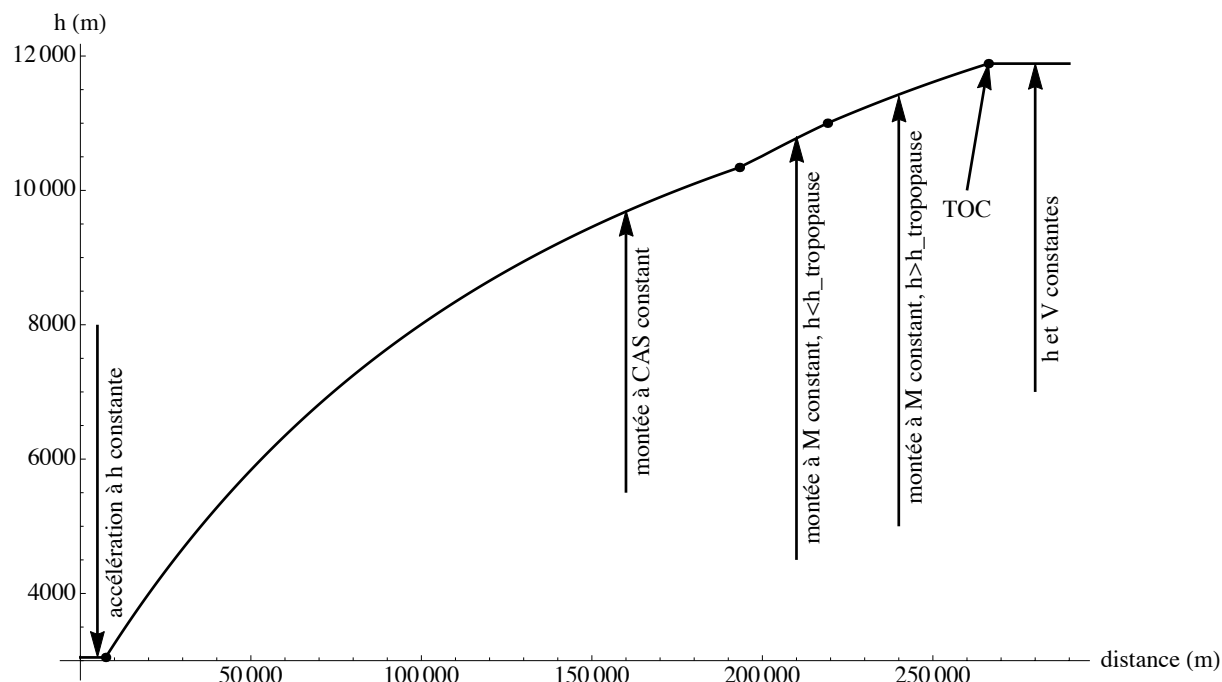


Figure 6.4 Profil de l'altitude h en fonction de la distance parcourue en phase de montée initiale.

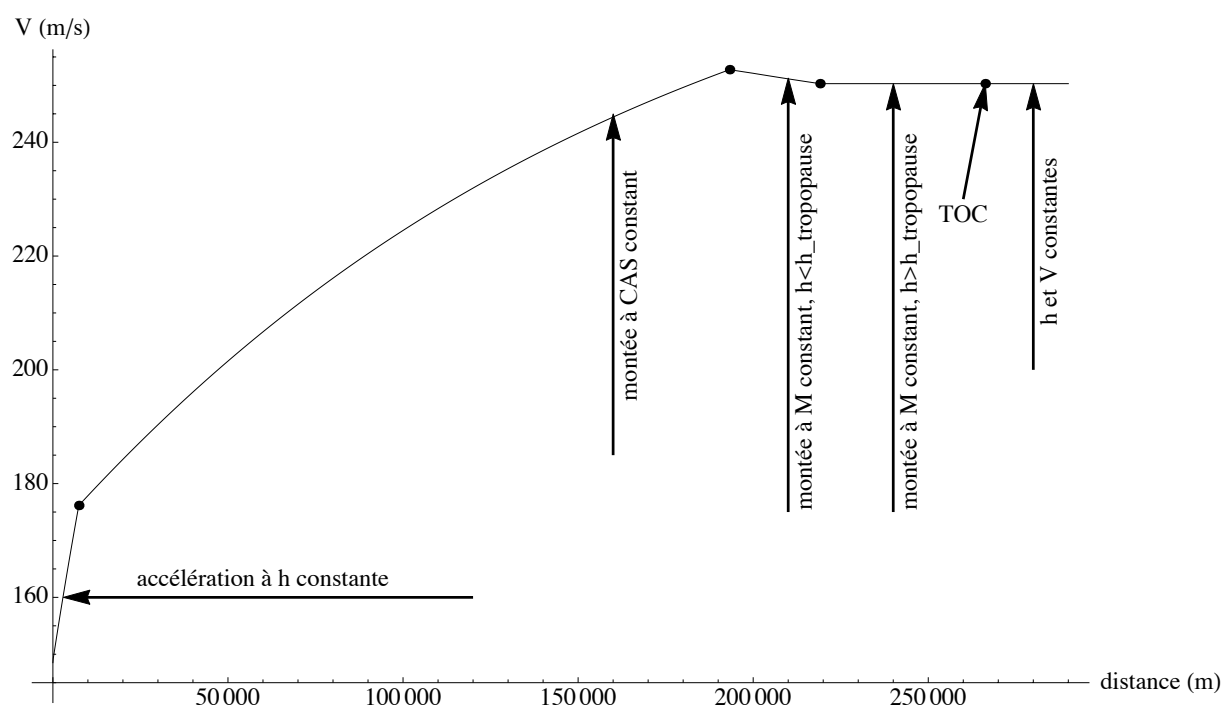


Figure 6.5 Profil de la vitesse propre V en fonction de la distance parcourue en phase de montée initiale.

CHAPITRE 7

CONSTRUCTION DE LA GRILLE ET DÉTERMINATION DE LA TRAJECTOIRE OPTIMALE

On a présenté aux chapitres précédents les méthodes utilisées pour le calcul des coûts pour différentes phases d'un vol. Il nous reste à mettre le tout ensemble pour trouver la trajectoire optimale. La trajectoire optimale est une courbe continue dans l'espace. Cette courbe peut passer par n'importe quel point de cet espace. Le nombre de trajectoires possibles est infini. On a alors choisi de discrétiser l'espace pour limiter le nombre de trajectoires possibles et pour pouvoir chercher un chemin optimal parmi un nombre fini de chemins. Ce choix de discrétisation introduit une erreur. Pour discrétiser l'espace, il faut définir une grille composée de plusieurs nœuds. Chaque nœud est un point de l'espace par lequel la trajectoire optimale peut passer. Cette grille est à la base de nos calculs. Pour obtenir la trajectoire optimale en des temps très courts, on doit définir une grille qui est facile à parcourir et un algorithme rapide de détermination du plus court chemin. Le coût de chaque arc est déterminé dynamiquement, car le calcul du coût dépend de la masse de l'avion et que la masse dépend du parcours qui précède cet arc. On utilise donc l'algorithme de Bellman-Ford (Bellman (1958)) pour trouver le plus court chemin dans cette grille. La grille est construite en utilisant un ordre topologique pour obtenir un graphe dirigé et acyclique. Cet ordre permet de visiter chaque nœud une seule fois pour déterminer le plus court chemin.

7.1 Construction de la grille

7.1.1 Géométrie de la grille

La grille doit couvrir une région qui contient toutes les trajectoires possibles. La taille de cette région a une grande importance. Elle ne devrait pas être trop grande pour que le temps de calcul soit le plus court possible. En d'autres termes, cette grille ne devrait pas contenir des régions inutiles qui ne seront jamais couvertes par le vol.

La grille est définie à partir de points de référence situés à la surface de la Terre. À chaque point de référence P , on associe plusieurs nœuds de la grille qui sont situés à la verticale du point P . En absence de vents et de régions interdites, la projection de la trajectoire optimale sur la surface de la Terre est l'arc de cercle qui passe par les points N_D et N_F et dont le centre O est le centre de la Terre (voir figure 7.1). Dans ce qui suit, on désigne cet arc par $\widehat{N_D N_F}$. Le centre de l'arc $\widehat{N_D N_F}$ est le point N_C . N_C est le premier point de référence. À

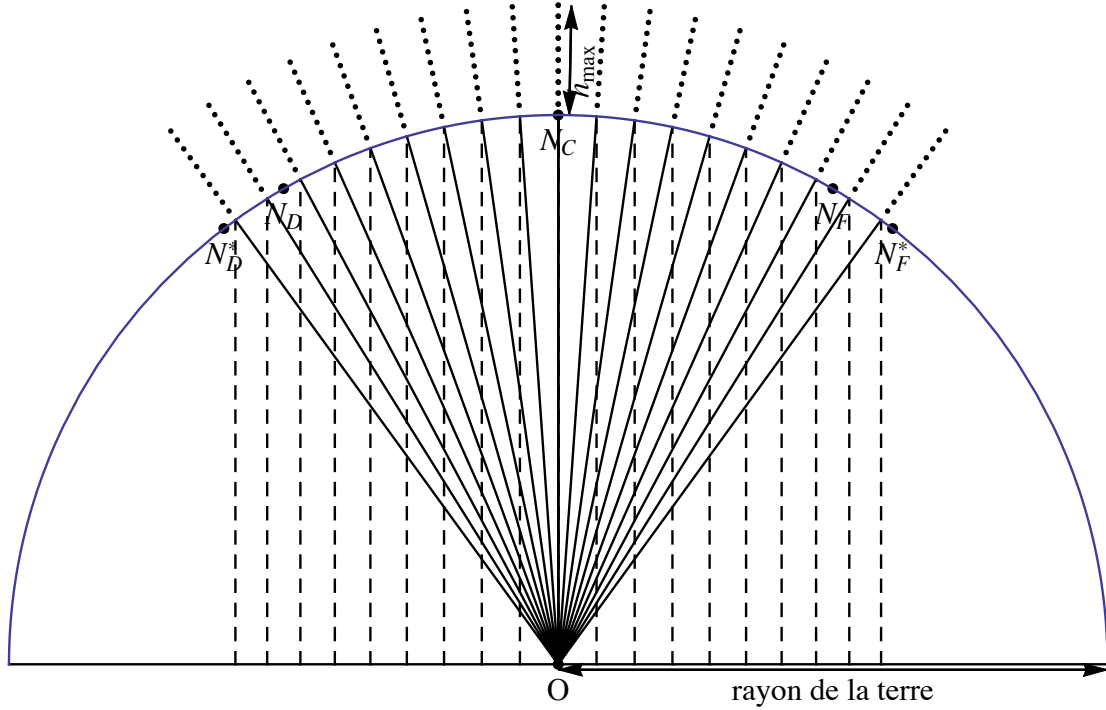


Figure 7.1 Schéma illustrant une section de l'hémisphère terrestre et les nœuds de la grille de calcul (représentés par des points situés au-dessus de la surface de la Terre) pour l'algorithme de plus court chemin dans le plan (N_D, O, N_F) .

partir de N_C , on dispose une série de points de référence P_i sur le cercle qui contient l'arc $\widehat{N_D N_F}$. Les points de référence P_i se situent entre les points N_D^* et N_F^* tel qu'illustré à la figure 7.1. Ces points de référence se situent à l'intersection du cercle et des droites issues du point O . Deux points consécutifs P_i et P_{i+1} sont séparés par une distance angulaire d'un demi-degré (on a plutôt utilisé une distance angulaire de quatre degrés à la figure 7.1 pour des raisons de lisibilité). Pour chaque point de référence P_i , on définit l'arc de cercle A_i qui appartient au cercle qui est l'intersection de la surface de la Terre avec le plan orthogonal au segment $\overline{N_D N_F}$ et qui passe par P_i . Ces plans sont représentés par des lignes pointillées verticales à la figure 7.1. Dans ce qui suit, on désigne l'arc du cercle associé au point N_C par A_C . À partir de chaque point de référence P_i sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$, on dispose d'autres points de référence $P_{i,j}$ sur l'arc A_i . Deux points consécutifs $P_{i,j}$ et $P_{i,j+1}$ de l'arc A_i sont séparés par une distance angulaire d'un demi-degré. Les points de références $P_{i,j}$ sont illustrés à la figure 7.2 où on a aussi utilisé une distance angulaire de quatre degrés pour la lisibilité de la figure.

Pour un vol typique, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{N_D N_F}$ est plus grande que celle des

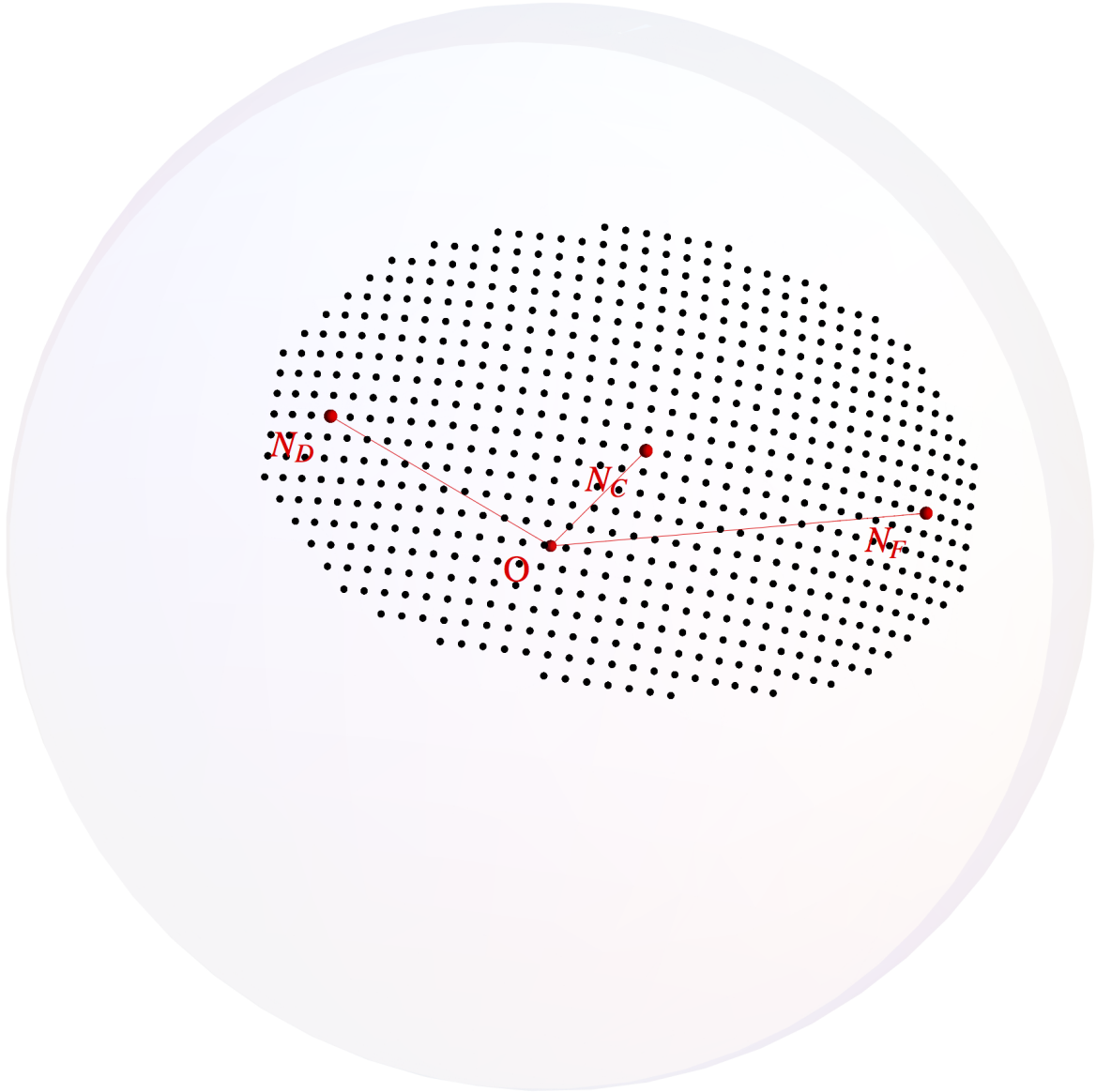


Figure 7.2 Illustration des points de référence en 3D.

arcs A_i . De plus, la longueur de l'arc du cercle A_C est plus grande que celle des autres arcs A_i . On utilise une ellipse de référence pour définir ces longueurs. La correspondance entre l'ellipse et les arcs sur la sphère est faite comme suit :

1. la longueur de l'arc $\widehat{N_D N_F}$ est donnée par la distance entre les foyers de l'ellipse ;
2. la longueur de l'arc $\widehat{N_D^* N_F^*}$ est donnée par la longueur $2a$ qui est le double de la longueur du demi-grand axe de l'ellipse ;
3. la longueur de l'arc A_C est donnée par la longueur $2b$ qui est le double de la longueur du demi-petit axe de l'ellipse ;

4. la longueur ℓ_i de chaque arc A_i est une fonction de la distance d_i qui sépare les points P_i et N_C , donnée par

$$\ell_i = 2 b \sqrt{1 - \left(\frac{d_i}{a}\right)^2}.$$

L'excentricité e de cette ellipse est un paramètre ajustable selon les conditions du vol (zones interdites au centre de la grille, vitesses de vents défavorables, etc.). Dans ce qui suit, on a utilisé une excentricité de $e = 0,8$.

À chaque point de référence $P_{i,j}$, on associe des nœuds de la grille qui sont situés à différents niveaux d'altitude. On a utilisé des niveaux d'altitude compris entre 20 000 pieds et l'altitude d'opération maximale de l'avion. Seuls les points N_D et N_F ont une altitude de 10 000 pieds qui est fixée d'avance. Les niveaux d'altitude sont espacés d'une distance de 2000 pieds. Étant donné que les niveaux d'altitude pairs sont réservés pour une direction et les niveaux impairs sont réservés pour l'autre (par exemple, les niveaux pairs de l'est vers l'ouest et les niveaux impairs de l'ouest vers l'est), on utilise les niveaux pairs ou les niveaux impairs selon l'orientation du vol.

7.1.2 Système de coordonnées

Puisqu'on doit construire une grille avec un ordre topologique et que cette grille doit être adaptée au vol considéré, on doit définir un système de coordonnées qui simplifie la représentation et la construction de la grille. On suppose que la Terre est une sphère et on utilise le repère (O, X, Y, Z) . L'axe des X est orienté du point O vers le point de latitude et de longitude nulle, soit l'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich. L'axe des Y est orienté du point O vers le point de latitude nulle et de 90° de longitude vers l'est du méridien de Greenwich. L'axe des Z est orienté du point O vers le pôle Nord géographique. Chaque point de la surface de la Terre est représenté par ses coordonnées sphériques définies comme suit :

- R : le rayon de la terre ;
- $\theta \in [-\pi, \pi]$: la longitude ;
- $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$: la latitude.

Pour simplifier le problème, on utilise ici le rayon de la Terre comme unité de longueur, c'est-à-dire $R = 1$. Chaque point de la Terre peut être représenté dans le repère (O, X, Y, Z) en utilisant ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) définies par :

$$\begin{cases} x = \cos(\phi) \cos(\theta); \\ y = \cos(\phi) \sin(\theta); \\ z = \sin(\phi). \end{cases} \quad (7.1)$$

Tous les points de référence $P_{i,j}$ sont définis à partir du point N_C qui est défini par les points de départ N_D et d'arrivée N_F , dont les coordonnées sphériques sont (R, θ_D, ϕ_D) et (R, θ_F, ϕ_F) respectivement.

On définit un nouveau repère (O, X', Y', Z') qui est orienté dans la direction de la grille. Les axes X' et Y' sont dans le plan (O, N_D, N_F) tandis que Z' est orthogonal à ce plan. Dans le repère (O, X', Y', Z') , les coordonnées sphériques de tout point P situé sur la surface de la Terre sont (R, θ', ϕ') . Les points principaux de la grille sont N_D, N_F et N_C . La représentation de ces points dans le repère (O, X', Y', Z') , en utilisant les coordonnées sphériques et cartésiennes, est résumée au tableau 7.1 avec $x'_D = x'_F$ et $y'_D = -y'_F$. Plus précisément, le repère

Tableau 7.1 Les coordonnées des points N_C, N_D et N_F dans le repère (O, X', Y', Z') .

Coordonnées	N_C	N_D	N_F
Cartésiennes	$(1, 0, 0)$	$(x'_D, y'_D, 0)$	$(x'_F, y'_F, 0)$
Sphériques	$(R, 0, 0)$	$(R, -\theta^{(3)}, 0)$	$(R, \theta^{(3)}, 0)$

(O, X', Y', Z') est défini comme suit :

- l'axe X' est orienté du point O vers le point N_C ;
- l'axe Y' est orienté du point de départ N_D vers le point d'arrivée N_F ;
- l'axe Z' est normal au plan (O, X', Y') .

En d'autres termes, le plan (O, X', Y') est défini par les points O, N_D et N_F .

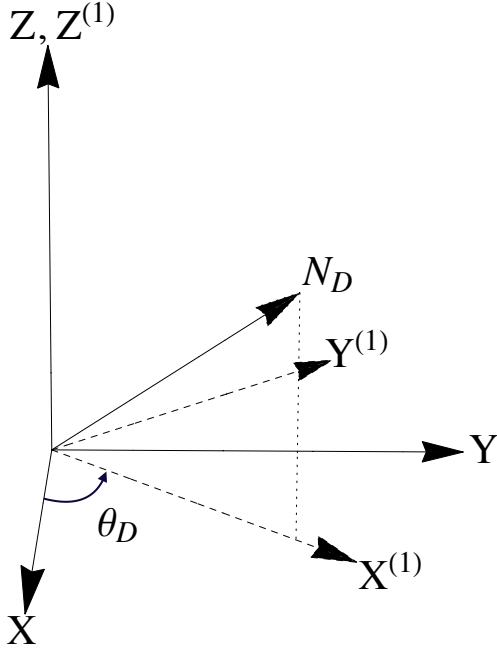
Pour effectuer ce changement de repère, on utilise quatre rotations. Elles sont illustrées à la figure 7.3. Pour chaque point P sur la surface de la Terre qui a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère (O, X, Y, Z) , on obtient ses coordonnées cartésiennes dans le repère (O, X', Y', Z') comme suit :

Première rotation Le repère $(O, X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)})$ est obtenu en faisant une rotation d'angle θ_D du repère (O, X, Y, Z) autour de l'axe des Z . Cette rotation amène le point N_D dans le plan $y^{(1)} = 0$. À la figure 7.3 (a), on a illustré cette rotation. Les coordonnées $\mathbf{X} := (x, y, z)^T$ et $\mathbf{X}^{(1)} := (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})^T$ sont liées par $\mathbf{X} = \mathbf{P}_{\theta_D} \cdot \mathbf{X}^{(1)}$, où

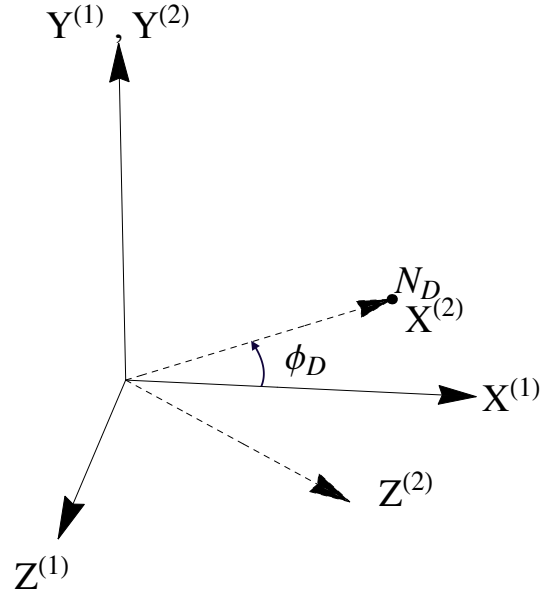
$$\mathbf{P}_{\theta_D} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_D) & -\sin(\theta_D) & 0 \\ \sin(\theta_D) & \cos(\theta_D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

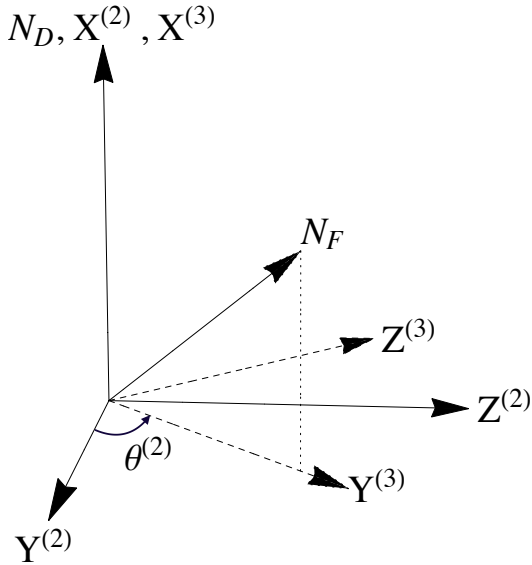
$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{P}_{-\theta_D} \cdot \mathbf{X},$$



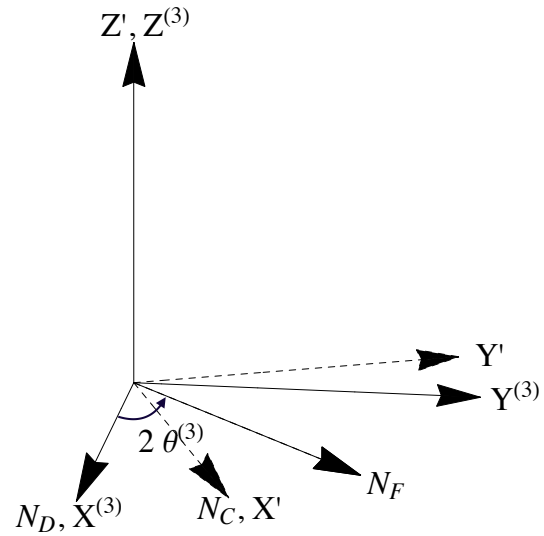
(a) Première rotation du repère (O, X, Y, Z) autour de l'axe des Z .



(b) Deuxième rotation du repère $(O, X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)})$ autour de l'axe des $Y^{(1)}$.



(c) Troisième rotation du repère $(O, X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)})$ autour de l'axe des $X^{(2)}$.



(d) Quatrième rotation du repère $(O, X^{(3)}, Y^{(3)}, Z^{(3)})$ autour de l'axe des $Z^{(3)}$.

Figure 7.3 Illustration des quatre rotations en 3D pour effectuer le changement des repères.

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x^{(1)} = \cos(\theta_D) x + \sin(\theta_D) y; \\ y^{(1)} = -\sin(\theta_D) x + \cos(\theta_D) y; \\ z^{(1)} = z. \end{cases}$$

Deuxième rotation Le repère $(O, X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)})$ est obtenu en faisant une rotation d'angle ϕ_D du repère $(O, X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)})$ autour de l'axe des $Y^{(1)}$. Cette rotation amène le point N_D dans le plan $z^{(2)} = 0$, de sorte que $y_D^{(2)} = z_D^{(2)} = 0$ et $x_D^{(2)} = 1$. Le point N_D est donc sur l'axe $X^{(2)}$. À la figure 7.3 (b), on a illustré cette rotation. On a donc :

$$\begin{cases} x^{(2)} = \cos(\phi_D) x^{(1)} + \sin(\phi_D) z^{(1)}; \\ y^{(2)} = y^{(1)}; \\ z^{(2)} = -\sin(\phi_D) x^{(1)} + \cos(\phi_D) z^{(1)}. \end{cases}$$

Troisième rotation Le repère $(O, X^{(3)}, Y^{(3)}, Z^{(3)})$ est obtenu en faisant une rotation d'angle $\theta^{(2)}$ du repère $(O, X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)})$ autour de l'axe des $X^{(2)}$, où

$$\theta^{(2)} := \arctan \left(\frac{z_F^{(2)}}{y_F^{(2)}} \right).$$

Cette rotation amène le point N_F dans le plan $z^{(3)} = 0$, de sorte que $y_D^{(3)} = z_D^{(3)} = 0$, $x_D^{(3)} = 1$ et $z_F^{(3)} = 0$. Le point N_D est donc sur l'axe $X^{(2)}$. À la figure 7.3 (c), on a illustré cette rotation. On a donc :

$$\begin{cases} x^{(3)} = x^{(2)}; \\ y^{(3)} = \cos(\theta^{(2)}) y^{(2)} + \sin(\theta^{(2)}) z^{(2)}; \\ z^{(3)} = -\sin(\theta^{(2)}) y^{(2)} + \cos(\theta^{(2)}) z^{(2)}. \end{cases}$$

Quatrième rotation Les points N_D, N_C et N_F sont tous dans le plan $z^{(3)} = 0$. Il nous reste à faire une rotation d'angle $\theta^{(3)}$ du repère $(O, X^{(3)}, Y^{(3)}, Z^{(3)})$ autour de l'axe des $Z^{(3)}$ pour amener le point N_C sur l'axe des X' . Cette rotation est illustrée à la figure 7.3 (d). L'angle $\theta^{(3)}$ satisfait

$$\sin(2 \theta^{(3)}) = y_F^{(3)} \implies \theta^{(3)} = \frac{\arcsin(y_F^{(3)})}{2}.$$

On a donc :

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta^{(3)}) x^{(3)} + \sin(\theta^{(3)}) y^{(3)}; \\ y' = -\sin(\theta^{(3)}) x^{(3)} + \cos(\theta^{(3)}) y^{(3)}; \\ z' = z^{(3)}. \end{cases}$$

Les caractéristiques de l'ellipse à considérer sont la distance c qui sépare un foyer (N_D ou N_F) et le centre de l'ellipse N_C qui est donnée par $c = \arcsin(y_F')$, la longueur du demi-grand axe $a = c/e$, et la longueur du demi-petit axe $b = a \sqrt{1 - e^2}$.

Puisque $R = 1$, la valeur de a est la mesure angulaire du demi-grand axe. Le nombre de

points de référence situés sur l'arc $\widehat{N_D^* N_F^*}$ à droite ou à gauche du point N_C est le nombre de demi-degrés dans a . Comme un demi de degré est égal à $\pi/360$ radians, le nombre N de points de référence situés sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$ est donné par

$$N = 2 \times \left\lfloor \frac{360 a}{\pi} \right\rfloor + 1. \quad (7.2)$$

On peut remarquer que les points N_D et N_F n'appartiennent pas toujours à la grille. Pour que ces points appartiennent à la grille, il faut que c soit un multiple de $\pi/360$.

Puisque les points de départ et d'arrivée ne font pas nécessairement partie de la grille, on ajoute alors deux points de référence complémentaires qu'on attribue à ces deux nœuds. Le nombre total de points de référence situés sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$ est donc égal à $N + 2$. Pour parcourir la grille, on utilise un entier $i \in \{0, \dots, N + 1\}$ pour numéroter les points de référence P_i où $i = 0$ est utilisé pour N_D et $i = N + 1$ pour N_F . Pour les points de référence P_i , pour $i \in \{1, \dots, N\}$, on désigne par n_i le nombre de points de référence $P_{i,j}$ situés sur l'arc A_i . On utilise un entier $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ pour numéroter ces points de référence. On détermine le nombre de nœuds n_i sur l'arc A_i à partir de la distance d_i qui sépare le point de référence P_i au centre de l'ellipse N_C par la relation

$$n_i = 2 \left\lfloor \frac{360 b}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{d_i}{a}\right)^2} \right\rfloor + 1. \quad (7.3)$$

Pour $i = 0$ et $i = N + 1$, on pose $n_0 = n_{N+1} = 1$.

Pour chaque couple (i, j) , pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$, on définit les niveaux d'altitude possibles du vol. Le nombre de niveaux d'altitude dépend de l'altitude maximale de l'avion h_{\max} et du sens du vol. Les altitudes à considérer dans la grille sont incluses dans l'intervalle $[20\,000, h_{\max}]$ pieds et sont espacées d'une distance de 2000 pieds. On détermine le nombre de niveaux d'altitude k_{\max} par

$$k_{\max} = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2000}, \quad (7.4)$$

où $h_{\min} = 21\,000$ dans le cas d'un vol à niveaux d'altitude impairs et $h_{\min} = 20\,000$ dans le cas d'un vol à niveaux d'altitude pairs. Les nœuds de la grille à considérer sont donc définis par les triplets (i, j, k) où $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ et $k \in \{0, \dots, k_{\max}\}$. On ajoute à ces nœuds les points de départ et d'arrivée qui ont les triplets $(0, 0, 0)$ et $(N + 1, 0, 0)$ respectivement.

7.1.3 Structure des nœuds et initialisation de la grille

Après avoir défini les points de référence $P_{i,j}$ de la grille, on doit définir les nœuds qui forment cette grille. Chaque nœud est défini par un point de référence et une altitude. Pour déterminer le plus court chemin, on doit associer à chaque nœud les paramètres qui forment sa structure.

Structure des nœuds de la grille

Chaque nœud de la grille est défini par les paramètres suivants :

— paramètres statiques :

- son triplet (i, j, k) ;
- sa position spatiale en coordonnées sphériques dans le repère (O, X, Y, Z) ;
- son altitude h .

Ces paramètres sont définis lors de la construction de la grille et ils sont statiques ;

— paramètres dynamiques :

- le temps t de passage par ce nœud ;
- la vitesse propre V de l'avion à ce nœud ;
- le triplet de son successeur (i', j', k') . Comme la trajectoire optimale est une chaîne de nœuds, chaque nœud doit avoir un pointeur vers le prochain nœud de cette chaîne ;
- la masse de l'avion m à ce nœud ;
- le coût total du vol C à ce nœud ;
- les conditions météorologiques à ce nœud au temps t :
 - la différence de la température par rapport à la température ISA au niveau moyen de la mer ΔT_{ISA} au temps t ;
 - la composante de la vitesse du vent suivant la latitude `VentLatitude` à ce nœud et au temps t ;
 - la composante de la vitesse du vent suivant la longitude `VentLongitude` à ce nœud et au temps t .

Ces paramètres sont initialisés lors de la construction de la grille et seront mis à jour chaque fois qu'on passe par ce nœud.

Pour chaque triplet (i, j, k) , on doit déterminer les paramètres définis ci-dessus.

Définition des coordonnées et de l'altitude de chaque nœud de la grille

Les coordonnées des nœuds N_D et N_F sont définis par défaut. Leurs coordonnées et leurs altitudes sont déjà connues. On doit donc déterminer les coordonnées de tous les autres nœuds

de la grille.

Pour simplifier le calcul, on utilise un entier ii pour identifier les points de référence P_i situés sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$ où

$$-\left\lfloor \frac{360}{\pi} a \right\rfloor \leq ii \leq \left\lfloor \frac{360}{\pi} a \right\rfloor.$$

Les valeurs de i et de ii sont liées par la relation

$$ii = i - \left\lfloor \frac{360}{\pi} a \right\rfloor - 1. \quad (7.5)$$

Pour parcourir les points $P_{i,j}$ situés sur l'arc A_i , on utilise un entier jj tel que

$$-\left\lfloor \frac{360}{\pi} b \sqrt{1 - \left(\frac{d_i}{a}\right)^2} \right\rfloor \leq jj \leq \left\lfloor \frac{360}{\pi} b \sqrt{1 - \left(\frac{d_i}{a}\right)^2} \right\rfloor.$$

Le point qui correspond à $ii = 0$ et $jj = 0$ est le centre de la grille N_C . La distance d_i est donc donnée par

$$d_i = \frac{360 \times ii}{\pi}.$$

Les valeurs de j et de jj sont liées par la relation

$$jj = j - \left\lfloor \frac{360}{\pi} b \sqrt{1 - \left(\frac{d_i}{a}\right)^2} \right\rfloor. \quad (7.6)$$

Pour chaque couple (ii, jj) , on détermine les coordonnées sphériques du point de référence $P_{i,j}$ associé dans le repère (O, X', Y', Z') par la relation suivante :

$$\begin{cases} R = 1; \\ \theta' = \frac{ii \ (\pi/360)}{\cos(jj \ (\pi/360))}; \\ \phi' = jj \ \frac{\pi}{360}, \end{cases} \quad (7.7)$$

où le terme $\cos(\phi')$ au dénominateur de θ' est utilisé pour que les points de référence $P_{i,j}$ se situent sur l'arc A_i . Sans ce terme, les points $P_{i,j}$ forment un arc sur le cercle qui passe par le point de référence P_i et centré au point O . En utilisant cette transformation, on obtient des arcs A_i qui sont parallèles. À la figure 7.4, on voit que toutes les lignes sont parallèles. À partir des coordonnées sphériques données à l'équation (7.7), on détermine les coordonnées cartésiennes (x', y', z') dans le repère (O, X', Y', Z') avec le système d'équations (7.1). On utilise la transformation inverse de repère pour trouver les coordonnées dans le

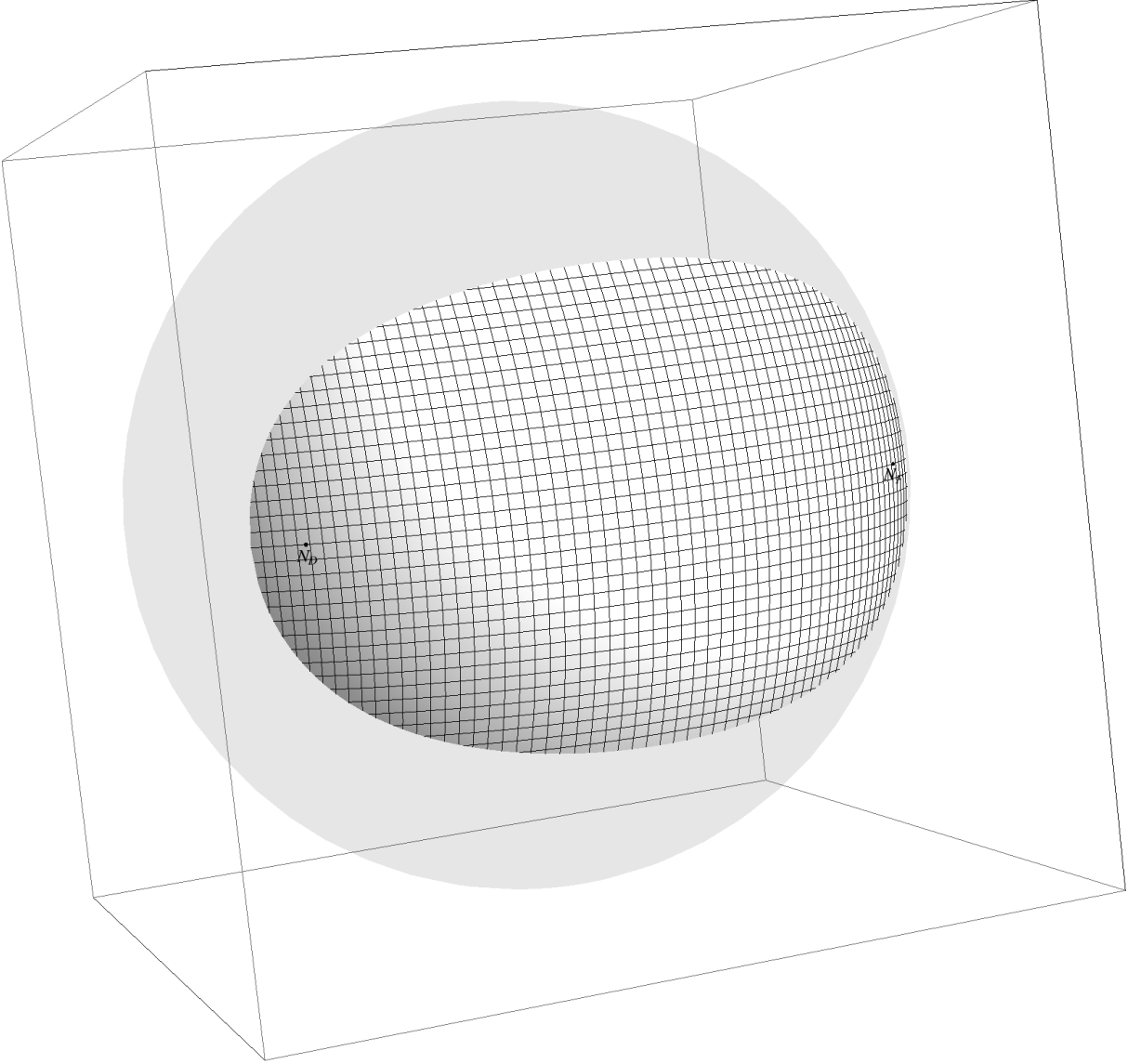


Figure 7.4 Grille de calcul représentée sur une sphère en trois dimensions.

repère (O, X, Y, Z) . On effectue donc les quatre rotations dans l'ordre inverse et en utilisant l'opposé des angles. On obtient ainsi les coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère (O, X, Y, Z) . On détermine les coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) dans le repère (O, X, Y, Z) par la relation

$$\begin{cases} R &= 1; \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \\ \phi &= \arcsin(z). \end{cases} \quad (7.8)$$

Pour chaque couple (ii, jj) et pour tout $k \in \{0, \dots, k_{\max}\}$, on définit le triplet (i, j, k) qui forme un nœud de la grille. On associe à chacun des nœuds les coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) définies par l'équation (7.8) et l'altitude $h = h_{\min} + k \times 2000$.

Initialisation de la grille

Puisqu'on utilise l'algorithme de Bellman-Ford pour la détermination du plus court chemin, on doit initialiser le coût de tous les nœuds à la valeur infini sauf pour ce qui est du nœud du début du calcul qui doit être initialisé à zéro. De plus, lors de la construction de la grille, aucun nœud n'a un successeur. On initialise le triplet du successeur à tous les nœuds à $(-1, -1, -1)$. L'utilisation de ce triplet signifie qu'il n'a pas de successeur.

Initialisation du nœud N_F Le premier nœud à être initialisé est le point où on commence le calcul qui est le nœud d'arrivée N_F . Ce nœud est le dernier point de la trajectoire et n'a pas de successeur. Au point d'arrivée N_F , on connaît la masse m_F , qui est la masse de l'avion vide plus le carburant de réserve et le carburant nécessaire pour l'atterrissage. Le temps de passage au point d'arrivée t_F , supposé connu, qui est le temps d'arrivée planifié. Étant donné que la vitesse de ce nœud est constante et connue, on attribue le champ de vitesse $V_{CAS,des}$. Le triplet $(N + 1, 0, 0)$ est donc initialisé comme suit :

- ses coordonnées sphériques : (R, θ_F, ϕ_F) ;
- son altitude : $h_F = 10\,000$ pieds ;
- le temps d'arrivée : t_F connu ;
- la vitesse CAS de descente : $V_{CAS,des} = 0$;
- son successeur : $(-1, -1, -1)$;
- la masse de l'avion à l'arrivée : m_F connue ;
- coût total : $C_F = 0$;
- conditions météorologiques à l'arrivée au temps t_F .

Initialisation du nœud N_D Comme toutes les valeurs des paramètres de ce nœud sont inconnues, on leur attribue la valeur infini. D'une façon similaire au nœud N_F , où la vitesse de ce nœud est constante et connue, on attribue le champ de vitesse $V_{CAS,mont}$. Le triplet $(0, 0, 0)$ est donc initialisé comme suit :

- ses coordonnées sphériques : (R, θ_D, ϕ_D) ;
- son altitude : $h_D = 10\,000$ pieds ;
- le temps de départ : $t_D = \infty$;
- la vitesse CAS de montée : $V_{CAS,mont} = 0$;
- son successeur : $(-1, -1, -1)$;

- la masse de l'avion au départ : $m_D = \infty$;
- le coût total du vol : $C_D = \infty$;
- les conditions météorologiques : $\Delta T_{\text{ISA}} = \text{VentLatitude} = \text{VentLongitude} = \infty$.

Initialisation de tous les autres nœuds de la grille Les valeurs des paramètres dynamiques des nœuds de la grille sont inconnues au départ. On leur associe donc la valeur infini. Chaque triplet (i, j, k) , $i \in \{1, \dots, N\}$ est initialisé comme suit :

- ses coordonnées sphériques : (R, θ, ϕ) ;
- son altitude : h ;
- le temps de passage par ce nœud : $t(i, j, k) = \infty$;
- la vitesse propre de l'avion à ce nœud : $V(i, j, k) = \infty$;
- son successeur : $(-1, -1, -1)$;
- la masse de l'avion à ce nœud : $m(i, j, k) = \infty$;
- le coût total du vol à ce nœud : $C(i, j, k) = \infty$;
- les conditions météorologiques : $\Delta T_{\text{ISA}} = \text{VentLatitude} = \text{VentLongitude} = \infty$.

7.1.4 Détermination des conditions météorologiques

On utilise les prévisions météorologiques disponibles pour l'aéronautique. Ces prévisions sont disponibles et mises à jour sur le site <http://www.grib.us> (url). Ces prévisions sont calculées quatre fois par jour, soit à 0 h, 6 h, 12 h et 18 h UTC (Temps Universel Coordonné). Chaque fois, on donne des fichiers pour les prévisions des sept prochains jours avec des intervalles de trois heures. Chaque fichier contient les prévisions pour des points de l'espace séparés d'un demi-degré en longitude et en latitude et à plusieurs niveaux d'altitude. Pour la préparation d'un plan de vol, on utilise la dernière prévision disponible. Lorsqu'on parcourt la grille, on associe à chaque nœud les conditions météorologiques associées. Or, d'après la construction de la grille, les nœuds obtenus ne correspondent pas aux mêmes coordonnées des prévisions et le temps de passage aussi ne correspond pas exactement au temps des prévisions. On interpole linéairement les données dans le temps et l'espace. Pour chaque nœud de la grille, on détermine les quatre points les plus proches qui sont situés au même niveau d'altitude. On trouve pour chacun de ces points les quatre prévisions qui encadrent le temps t de passage de l'avion dans cette région. On fait une interpolation linéaire suivant le temps des prévisions à ces points. Ensuite, on interpole dans l'espace les valeurs obtenues de l'interpolation précédente.

Par exemple, si on traverse un point P qui se trouve entre quatre points A, B, C et D à l'instant $t \in [3, 6]$ h, on interpole dans le temps les données des quatre points pour $3h \leq t \leq 6h$ afin d'obtenir une prévision pour l'instant t . On interpole ensuite les quatre prévisions à

l'instant t dans l'espace pour obtenir la prévision au point P à l'instant t .

7.1.5 Définition d'un voisinage pour chaque nœud de la grille

Pour déterminer la trajectoire optimale, il suffit de trouver le plus court chemin qui relie les points N_D et N_F de la grille et en utilisant les coûts des arcs comme mesure de la distance. On doit donc définir le voisinage de chaque nœud de la grille qui contient son successeur pour déterminer le plus court chemin.

Puisqu'on détermine la trajectoire optimale en utilisant un calcul à rebours et que les indices i des nœuds (i, j, k) de la grille sont ordonnés dans la direction du vol, on doit alors parcourir la grille suivant les indices i décroissants.

On doit d'abord définir le voisinage du nœud $(N + 1, 0, 0)$ qui correspond au point N_F . Ces nœuds se trouvent dans un cylindre elliptique centré au point N_F et ayant un demi-grand axe superposé à celui de la grille et avec des niveaux d'altitude compris dans $\{k_0, \dots, k_{\max}\}$. La région de descente est représentée à la figure 7.5 par l'ellipse centrée au point N_F . La région elliptique de ce cylindre doit garantir une distance suffisante pour effectuer la descente finale avec un grand choix de directions. Ce cylindre qui couvre la région de descente finale a la même excentricité e que la grande ellipse et un demi-grand axe de longueur $\pi/360 \times 9$, ce qui est équivalent à une mesure angulaire de $4,5^\circ$. Le choix de la longueur et l'excentricité sont des paramètres ajustables selon le vol (p. ex. zones interdites, obstacles, type et masse de l'avion, etc.). Puisque le point N_F ne fait pas partie de la grille à l'intérieur de l'ellipse, on doit déterminer le couple (i_F, j_F) du point qui représente le centre de cette ellipse. Il est donné par :

$$\begin{cases} i_F &= \left\lfloor \frac{360}{\pi} c \right\rfloor + \left\lfloor \frac{360}{\pi} a \right\rfloor + 1; \\ j_F &= \left\lfloor b \times \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} \right\rfloor. \end{cases} \quad (7.9)$$

De même, on détermine les nœuds qui peuvent avoir comme voisin le point de départ N_D . Ces nœuds se trouvent dans un autre cylindre elliptique, centré au point N_D et ayant un demi-grand axe superposé à celui de la grille et à des niveaux d'altitude compris dans $\{k_0, \dots, k_{\max}\}$. La région de montée est représentée à la figure 7.5 par l'ellipse centrée au point N_D . Ce cylindre doit couvrir la région de montée initiale et doit être plus large que celui de la région de descente, car la distance nécessaire pour la descente est plus petite que celle de la montée. De plus, lors de la phase de montée initiale, la masse de l'avion est plus élevée. La région elliptique de ce cylindre a la même excentricité e que la grande ellipse avec un demi-grand axe de longueur $\pi/360 \times 15$, ce qui est équivalent à une mesure angulaire de $7,5^\circ$. Ces paramètres sont aussi ajustables selon le vol. Ce cylindre doit garantir une distance suffisante pour

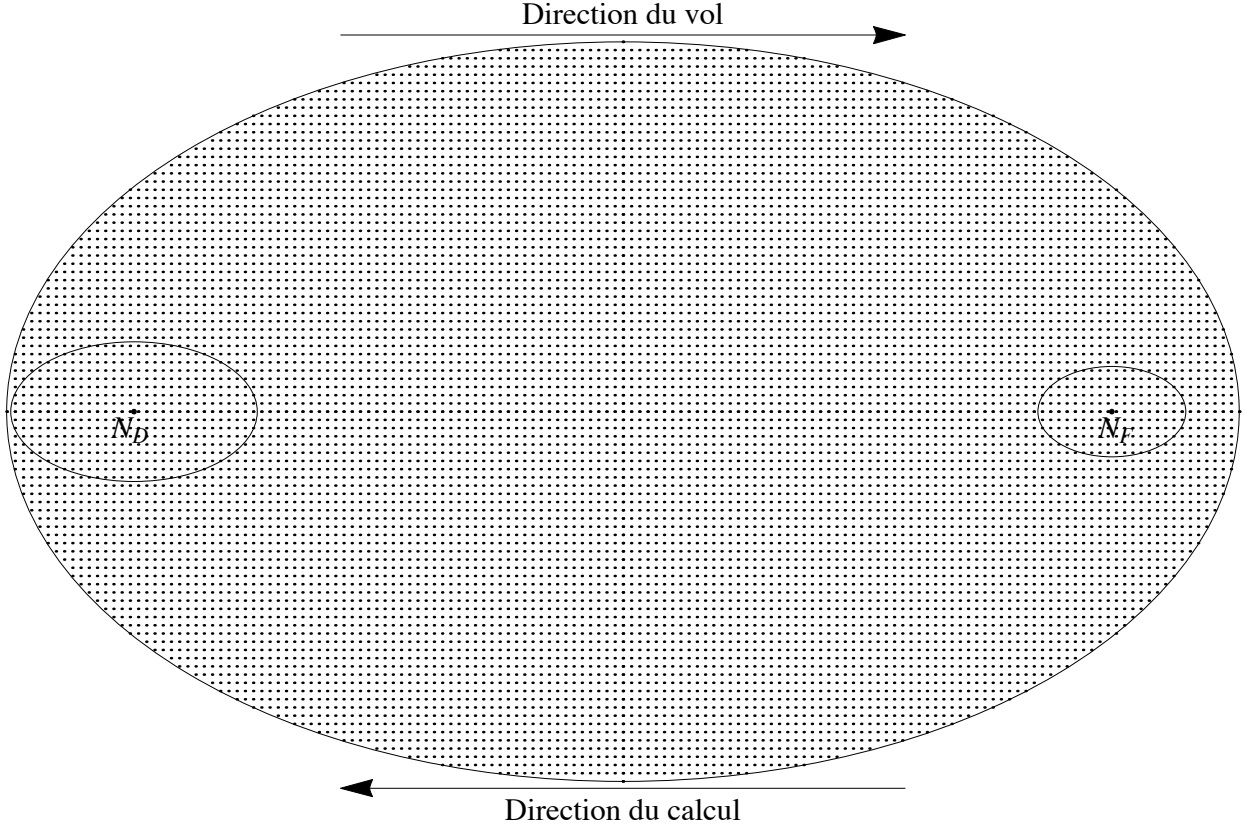


Figure 7.5 Représentation des nœuds de la grille incluant les régions de montée initiale et de la descente finale.

effectuer la montée initiale avec un grand choix de directions. Puisque le point N_D ne fait pas partie de la grille à l'intérieur de l'ellipse, on doit aussi déterminer le couple (i_D, j_D) du point qui représente le centre de cette ellipse. Il est donné par :

$$\begin{cases} i_D = -\left\lfloor \frac{360}{\pi} \frac{c}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{360}{\pi} \right\rfloor + 1; \\ j_D = \left\lfloor b \times \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} \right\rfloor. \end{cases} \quad (7.10)$$

À la figure 7.5, on a représenté une grille de calcul incluant les deux ellipses qui forment la région de montée initiale et de descente finale. Le nœud $(N+1, 0, 0)$ a tous les points situés dans l'ellipse autour du point N_F comme voisins. Tous les nœuds situés dans l'ellipse autour du point N_D ont le nœud $(0, 0, 0)$ comme voisin.

Pour chaque nœud (i, j, k) où $i \in \{2, \dots, N\}$, on définit un ensemble de ses voisins. On

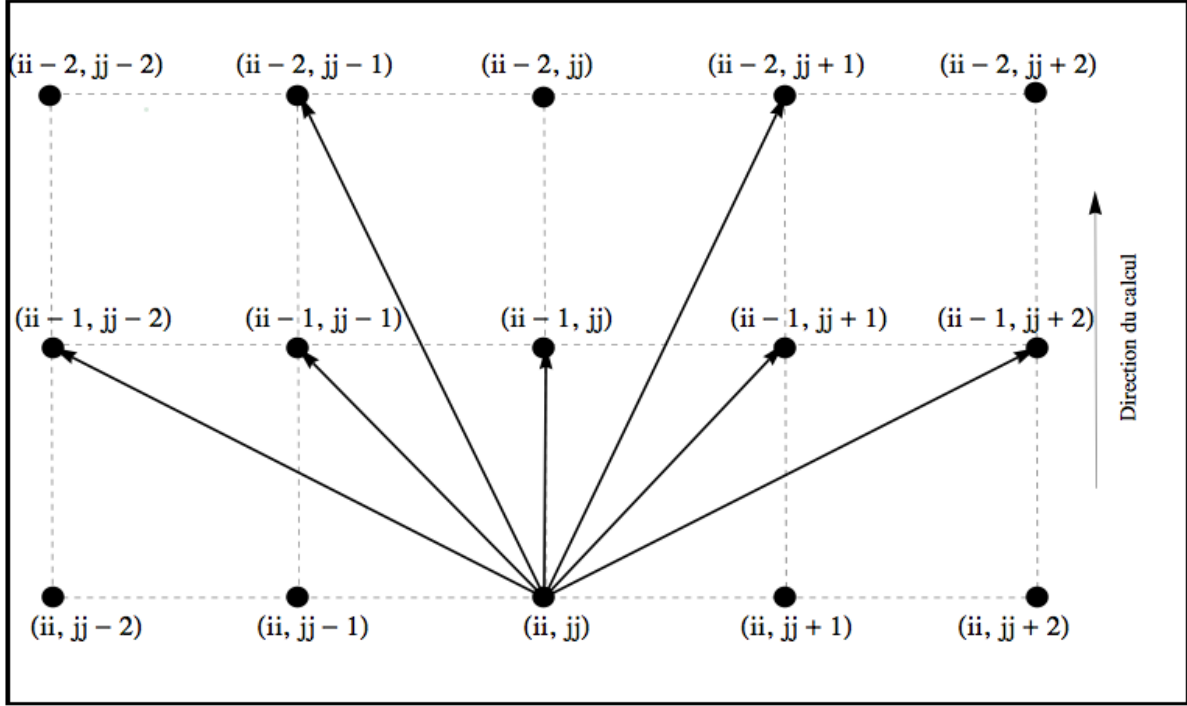


Figure 7.6 Schéma des voisins d'un nœud (ii, jj) de la grille de calcul sur un niveau d'altitude.

calcule les valeurs de ii et jj associées à ce nœud à l'aide des équations (7.5) et (7.6). On a choisi les niveaux d'altitude $k' \in \{k-1, k, k+1\}$ où, en général, $k' \in \{0, \dots, k_{\max}\}$. Pour chaque niveau d'altitude k' , on choisit sept nœuds voisins tel qu'illustré à la figure 7.6. Chaque point du voisinage de (i, j, k) est défini par un triplet (i', j', k') . Les couples (i', j') sont définis par :

- $(ii-1, jj-2)$;
- $(ii-1, jj-1)$;
- $(ii-1, jj)$;
- $(ii-1, jj+1)$;
- $(ii-1, jj+2)$;
- $(ii-2, jj-1)$;
- $(ii-2, jj+1)$.

Ce choix de voisinage réduit le nombre de trajectoires. Il réduit aussi le nombre d'angles pour les virages. Il serait possible d'ajouter plus de voisins vers l'avant pour améliorer la solution.

Chaque nœud de la grille a un maximum de $7 \times 3 = 21$ voisins. Le maximum est atteint lorsque $k \in \{1, \dots, k_{\max} - 1\}$ et que le nœud ne se trouve pas à la frontière de l'ellipse. Pour

chaque nœud (i, j, k) de la grille, on définit son voisinage $E[(i, j, k)]$ par

$$E[(i, j, k)] := \{(i', j', k') : (i', j', k') \text{ est un voisin de } (i, j, k)\}. \quad (7.11)$$

On définit aussi l'ensemble $E'[(0, 0, 0)]$ des points qui appartiennent au cylindre elliptique centré au point N_D par

$$E'[(0, 0, 0)] := \{(i, j, k) : (i, j) \in \text{cylindre centré en } N_D\}. \quad (7.12)$$

Si un nœud (i, j, k) appartient à l'ensemble $E'[(0, 0, 0)]$, alors il a aussi le nœud $(0, 0, 0)$ pour voisin et on ajoute à l'ensemble $E[(i, j, k)]$ le nœud $(0, 0, 0)$.

7.2 Détermination du plus court chemin dans la grille

Pour trouver la trajectoire optimale, il faut déterminer le plus court chemin dans la grille définie à la sous-section précédente. La méthode utilisée pour construire la grille donne un graphe ordonné selon la direction du vol. On obtient ainsi un graphe dirigé et acyclique DAG (pour *Direct Acyclic Graph* en anglais). On a déjà précisé précédemment qu'on utilise l'algorithme de Bellman-Ford dans un graphe DAG pour la détermination du plus court chemin. Son temps d'exécution est proportionnel au nombre de nœuds de la grille multiplié par le nombre de voisins de chaque nœud.

Cet algorithme consiste à parcourir la grille selon les indices i des triplets (i, j, k) qui définissent les nœuds de la grille. Puisqu'on effectue le calcul à rebours, on commence à partir de $i = N + 1$, qui correspond à N_F , et on parcourt la grille dans l'ordre décroissant de l'indice i jusqu'au niveau $i = 0$ qui correspond à N_D .

7.2.1 Phase de descente finale et optimisation de la vitesse de descente

À partir du nœud $(N + 1, 0, 0)$, on détermine la liste de ses voisins qui appartiennent à l'ensemble $E[(N + 1, 0, 0)]$. Pour chaque triplet $(i', j', k') \in E[(N + 1, 0, 0)]$, on détermine le coût de l'arc qui le relie à N_F . Pour déterminer ce coût, il faut trouver la vitesse $V_{\text{CAS,des}}$ optimale pour effectuer la descente finale.

À la figure 7.7, on a présenté le coût total d'un arc typique en phase de descente finale en fonction de $V_{\text{CAS,des}}$. On voit que le coût de l'arc dépend de la valeur de $V_{\text{CAS,des}}$. À la figure 7.8, on a représenté le coût total du même arc que celui de la figure 7.7 en utilisant une valeur du CI moins élevée. On constate que plus la valeur du CI est élevée, plus la valeur de $V_{\text{CAS,des}}$ qui minimise le coût est grande. On a vérifié cette courbe pour différentes valeurs du CI, de masses m et de vitesses de vent \mathbf{V}_w . On a constaté que la valeur de $V_{\text{CAS,des}}$ qui

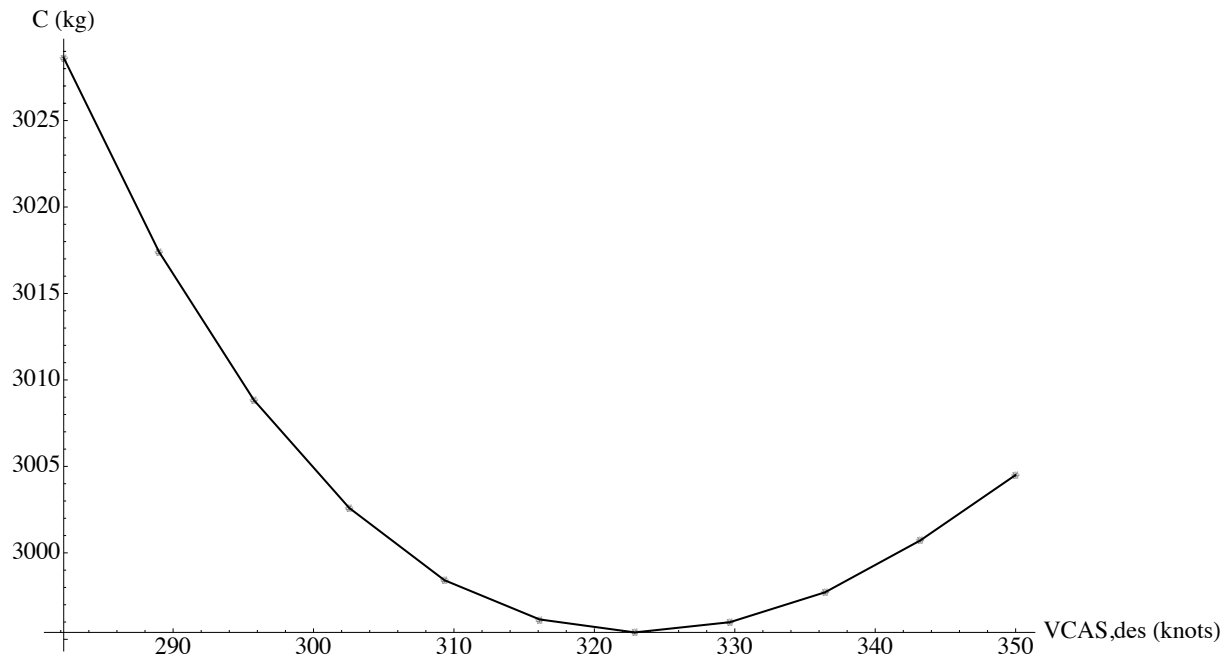


Figure 7.7 Coût total d'un arc de descente finale en fonction de $V_{CAS,des}$.

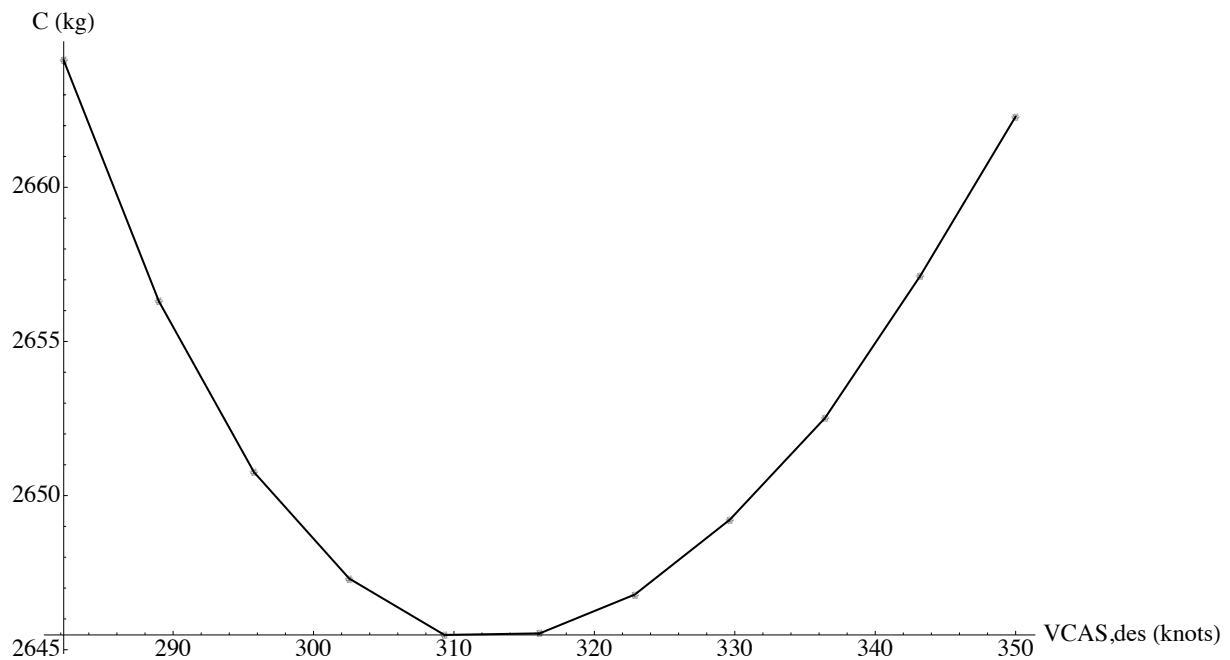


Figure 7.8 Coût total du même arc que celui de la figure 7.7 avec une valeur de CI plus petite.

minimise le coût varie lorsqu'on change CI , m ou V_w . On remarque aussi que les courbes des

figures 7.7 et 7.8 sont lisses et que le coût total est peu sensible à $V_{\text{CAS,des}}$ autour du point minimum.

Le nœud N_F forme un arc avec chaque nœud de son voisinage $E[(N + 1, 0, 0)]$. Chacun de ces arcs peut avoir des conditions de vol différentes des autres arcs formés par les autres voisins (p. ex. des vitesses de vent différentes). La valeur de $V_{\text{CAS,des}}$ qui minimise le coût de cet arc peut être différente de celle des autres arcs. On doit donc déterminer une valeur de $V_{\text{CAS,des}}$ optimale pour chaque nœud $(i, j, k) \in E[(N + 1, 0, 0)]$. On a choisi dix valeurs de $V_{\text{CAS,des}}$ équidistantes dans l'intervalle $[V_{\text{CAS,min}}, V_{\text{CAS,max}}]$, où $V_{\text{CAS,min}} = 250$ nœuds et $V_{\text{CAS,max}}$ est la vitesse maximale de l'avion. Cette discrétisation permet d'estimer la vitesse optimale et l'erreur relative maximale encourue est inférieure à 0,1 %.

Pour chaque triplet (i', j', k') dans $E[(N + 1, 0, 0)]$, on détermine :

- ses coordonnées sphériques θ et ϕ ;
- son altitude $h_2 = h_{\text{min}} + k' \times 2000$ en pieds ;
- les conditions météorologiques au point (i', j', k') et au temps t_F : ΔT_{ISA} , $V_{w,x}$ et $V_{w,y}$;
- la vitesse optimale V_2 à l'altitude h_2 avec $m = m_F$ et avec les conditions météorologiques au temps t_F .

Lorsque la valeur de CI est élevée et/ou la masse de l'avion est grande, on ne peut pas voler à haute altitude. Pour les hautes altitudes, la vitesse V_2 peut être supérieure à la vitesse maximale de l'avion. Dans ce cas, l'arc considéré ne peut pas être optimal et on passe au voisin suivant. Sinon, pour chaque vitesse $V_{\text{CAS,des}} \in \{V_{\text{CAS,min}}, \dots, V_{\text{CAS,max}}\}$, on utilise la fonction **CoutArcDes** définie au chapitre 6 pour calculer le coût de l'arc liant les nœuds (i', j', k') et $(N + 1, 0, 0)$. Cette fonction donne la masse de l'avion au nœud (i', j', k') ainsi que le coût total C_2 et le temps t_2 de parcours de cet arc. Si la valeur de C est inférieure à $C(i', j', k')$, le nœud $(N + 1, 0, 0)$ est alors le successeur optimal du nœud (i', j', k') et les paramètres de ce nœud doivent être mis à jour. On associe donc au triplet (i', j', k') les paramètres :

- $t(i', j', k') = t_F - t_2$;
- $V(i', j', k') = V_2$;
- son successeur, le triplet $(N + 1, 0, 0)$;
- $m(i', j', k') = m_2$;
- $C(i', j', k') = C_2$;
- les conditions météorologiques au temps $t(i', j', k')$.

Puisque la vitesse optimale $V_{\text{CAS,des}}^*$ peut être différente suivant les nœuds (i', j', k') , on définit un vecteur $VV_{\text{CAS,des}}$ de dimension n_F . La valeur de n_F est la dimension de l'ensemble $E[(N + 1, 0, 0)]$. À chaque nœud r de cet ensemble avec $r \in \{0, \dots, n_F - 1\}$, on attribue la valeur de $V_{\text{CAS,des}}$ obtenue à $VV_{\text{CAS,des}}(r)$.

7.2.2 Phase de croisière

Pour parcourir la grille, on utilise l'ordre topologique des points de référence $P_{i,j}$. On parcourt les arcs A_i dans l'ordre décroissant des indices i , c'est-à-dire de $i = N$ jusqu'à $i = 2$. Pour chaque arc A_i , on parcourt tous les points de référence $P_{i,j}$ pour les indices j dans $\{0, \dots, n_i - 1\}$. Pour chaque point de référence $P_{i,j}$, on visite tous les nœuds (i, j, k) pour les valeurs de k qui varient de 0 jusqu'à k_{\max} . Ce parcours garantit un ordre topologique ce qui permet d'utiliser l'algorithme de plus court chemin dans un graphe DAG.

Pour chaque nœud (i, j, k) visité, on évalue son coût $C(i, j, k)$. Si $C(i, j, k) = \infty$, alors ce nœud n'est pas joignable et n'appartient pas à la trajectoire optimale. On passe donc au nœud suivant. Sinon, on détermine l'ensemble $E[(i, j, k)]$ de ses voisins. Pour chaque nœud $(i', j', k') \in E[(i, j, k)]$, on identifie les paramètres définis dans sa structure. On calcule la vitesse optimale V_2 à l'altitude $h(i', j', k')$ avec les conditions météorologiques. Si la vitesse V_2 est supérieure à la vitesse maximale de l'avion, alors cet arc n'est pas optimal et on passe au voisin suivant. Sinon, on utilise la fonction **CoutArc** définie au chapitre 5 pour déterminer le coût de l'arc liant (i, j, k) à (i', j', k') . On obtient la masse m_2 de l'avion au nœud (i', j', k') ainsi que le coût total C_2 et le temps t_2 du parcours de cet arc. Puisqu'on utilise l'ordre topologique, le coût total du nœud (i, j, k) est optimal et si ce nœud appartient à la trajectoire optimale, alors le trajet défini par le successeur de ce nœud est optimal pour atteindre le nœud N_F . Si $C(i, j, k) + C_2 < C(i', j', k')$, alors le nœud (i, j, k) est le successeur optimal du nœud (i', j', k') et les paramètres dynamiques de la structure du nœud (i', j', k') doivent être mis à jour comme suit :

- $t(i', j', k') = t(i, j, k) - t_2$;
- $V(i', j', k') = V_2$;
- son successeur, le triplet (i, j, k) ;
- $m(i', j', k') = m_2$;
- $C(i', j', k') = C_2 + C(i, j, k)$;
- les conditions météorologiques au temps $t(i', j', k')$.

À la fin du parcours, chaque nœud aura ses paramètres optimaux à jour.

7.2.3 Phase de montée initiale et optimisation de la vitesse de montée

Si le triplet (i, j, k) appartient à l'ensemble $E'[(0, 0, 0)]$, il a donc le nœud N_D pour voisin. L'arc qui relie le nœud (i, j, k) au nœud $(0, 0, 0)$ est donc un arc de montée initiale. On détermine les conditions météorologiques du nœud $(0, 0, 0)$, au temps $t(i, j, k)$. Comme pour le cas de la descente finale, il faut estimer la vitesse de montée optimale $V_{\text{CAS, mont}}^*$. Les courbes du coût total en fonction de cette vitesse sont semblables à celles de la descente finale. On

applique la même procédure utilisée pour la descente pour trouver la valeur optimale $V_{\text{CAS,mont}}^*$ de chaque arc. Pour chaque vitesse $V_{\text{CAS,mont}} \in \{V_{\text{CAS,min}}, \dots, V_{\text{CAS,max}}\}$, on utilise la fonction **CoutArcMont** définie au chapitre 6 pour calculer le coût de l'arc liant les nœuds (i, j, k) à $(0, 0, 0)$. On obtient la masse de l'avion au nœud N_D ainsi que le temps de parcours t_2 et le coût total C_2 de cet arc. Si $C_2 + C(i, j, k) < C(0, 0, 0)$, alors le nœud $(0, 0, 0)$ est le successeur optimal de N_D et les paramètres dynamiques de la structure du nœud $(0, 0, 0)$ doivent être mis à jour comme suit :

- $t_D = t(i, j, k) - t_2$;
- $V = V_{\text{CAS,mont}}$;
- son successeur, le nœud (i, j, k) ;
- $m_D = m_2$;
- $C_D = C_2 + C(i, j, k)$;
- les conditions météorologiques au temps t_D .

7.2.4 Calcul de la trajectoire optimale

Lorsqu'on finit le parcours de la grille, on peut déterminer la trajectoire optimale. Le premier point de la grille est le nœud N_D qui est représenté par le triplet $(0, 0, 0)$. Ce nœud donne le coût total de la trajectoire, la vitesse $V_{\text{CAS,mont}}$, la masse de l'avion m_D et l'heure de départ t_D . On trouve aussi le triplet (i, j, k) de son successeur. À partir de ce successeur, on détermine le nœud suivant et ainsi de suite jusqu'à atteindre le point N_F . On trouve ainsi tous les points de la trajectoire dans l'ordre. On détermine la valeur de $V_{\text{CAS,des}}$ en déterminant l'indice r du prédécesseur de N_F dans la liste $E[(N + 1, 0, 0)]$, d'où on tire

$$V_{\text{CAS,des}} = V V_{\text{CAS,des}}(r).$$

7.3 Exemples de trajectoires optimales et discussion des résultats

Pour illustrer le comportement de l'algorithme, on présente quelques simulations de plans de vol. L'objectif de ces simulations est de s'assurer que l'algorithme donne des résultats compatibles avec les notions qu'on a présentées aux chapitres précédents. On a examiné le comportement de la trajectoire en fonction de plusieurs paramètres. Les paramètres utilisés sont le CI, la masse initiale de l'avion, la direction du vol et les vitesses du vent. On a considéré un vol Montréal - Paris. Le point N_D est situé à l'aéroport Montréal-Trudeau et le point N_F est situé à l'aéroport Paris-Charles de Gaulle.

Dans un premier temps, on a examiné l'effet du CI sur la trajectoire optimale. On a choisi trois valeurs du CI dénotées par CI_{min} , CI_{moyen} et CI_{max} telles que $\text{CI}_{\text{min}} < \text{CI}_{\text{moyen}} < \text{CI}_{\text{max}}$.

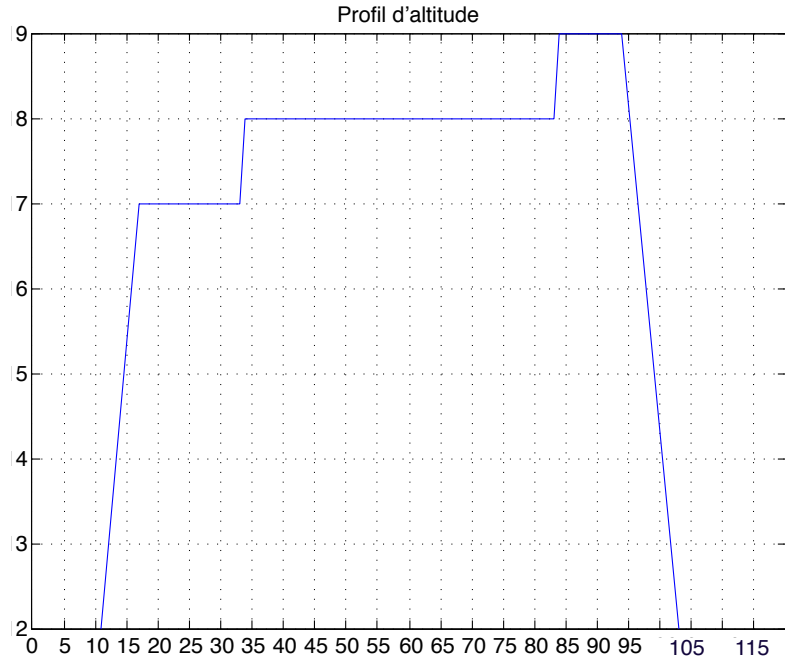


Figure 7.9 Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\min} (le niveau d'altitude k en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).

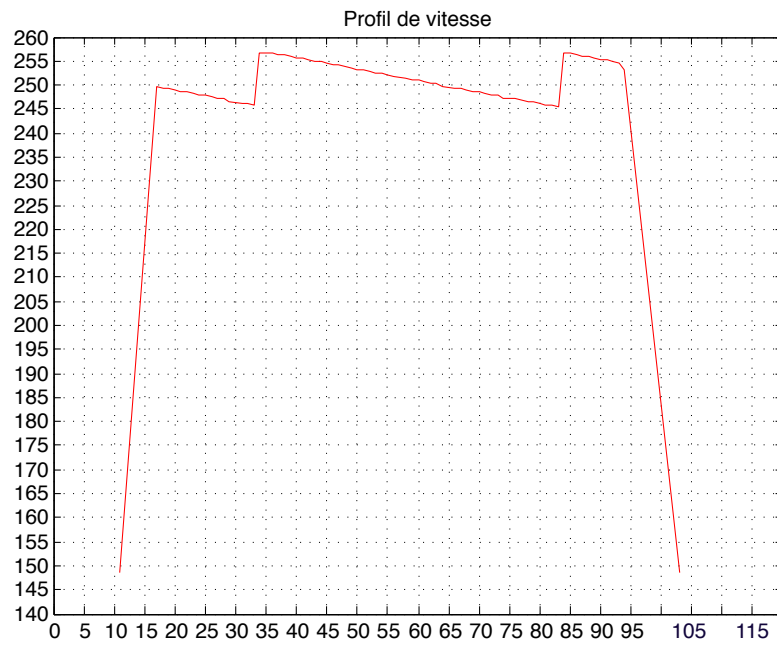


Figure 7.10 Profil de vitesse de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\min} (la vitesse V en m/s en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).

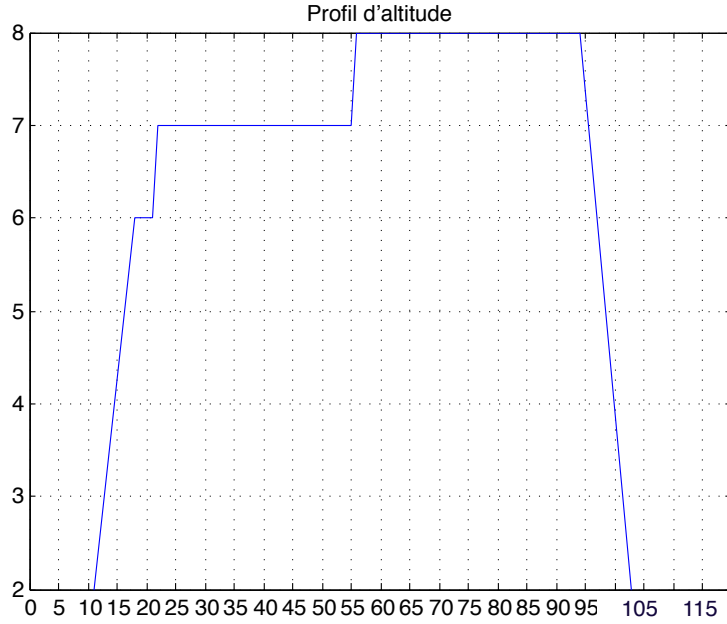


Figure 7.11 Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{moyen} (le niveau d'altitude k en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).

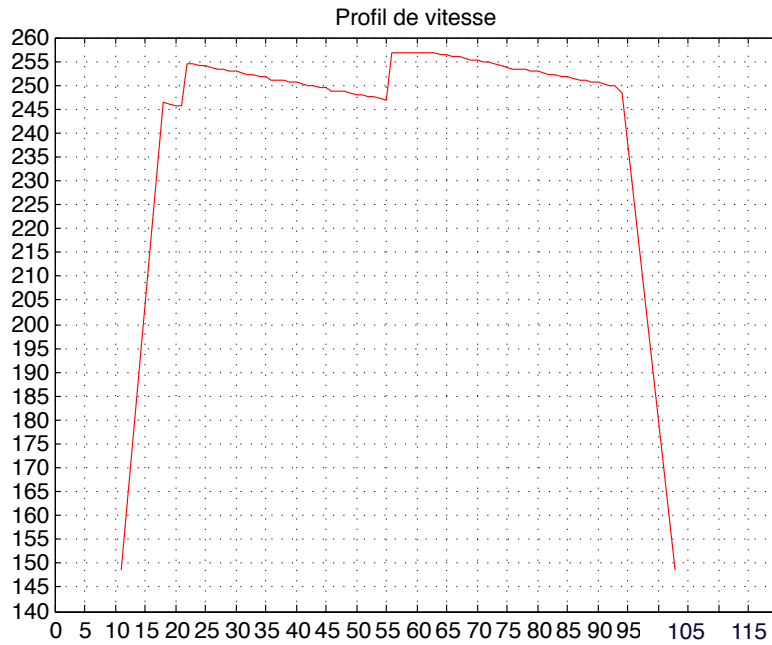


Figure 7.12 Profil de vitesse de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{moyen} (la vitesse V en m/s en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).

On a utilisé des conditions météorologique ISA avec un vent nul et la même masse nominale

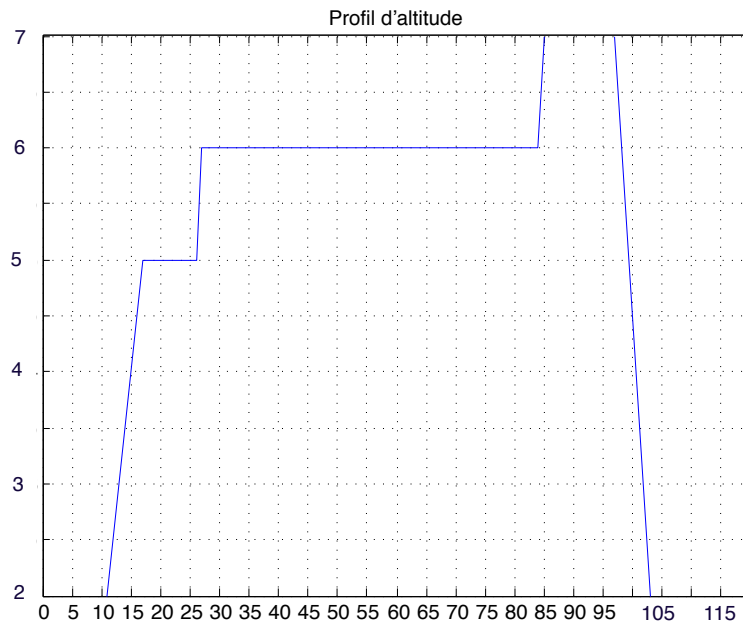


Figure 7.13 Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\max} (le niveau d'altitude k en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).

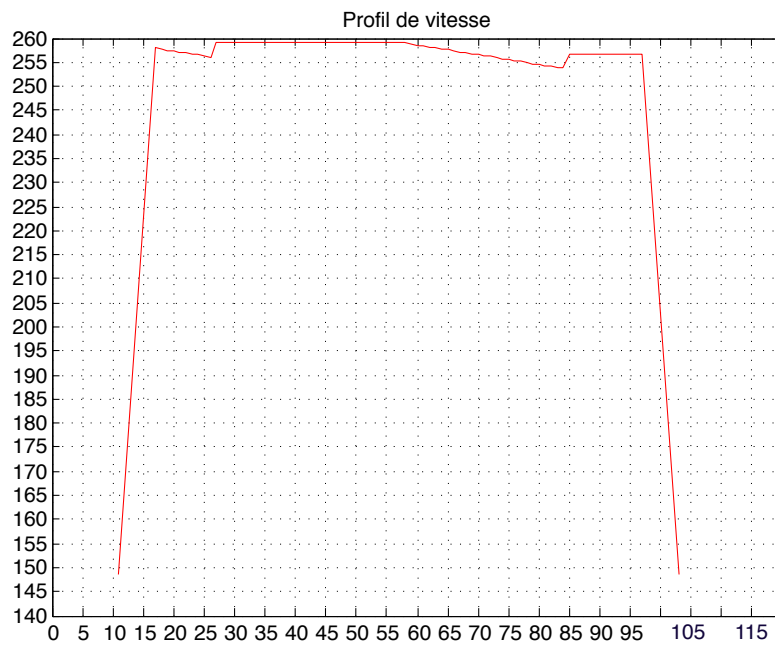


Figure 7.14 Profil de vitesse de la trajectoire pour un vol Montréal - Paris avec CI_{\max} (la vitesse V en m/s en fonction de l'indice i de la position sur l'arc $\widehat{N_D N_F}$).

de l'avion de m_F pour les trois cas. Pour illustrer le comportement des profils de la vitesse et de l'altitude dans les trois cas, les profils d'altitude et de vitesse pour CI_{\min} , CI_{moyen} et CI_{\max} sont représentés aux figures 7.9 à 7.14.

À la figure 4.9 de la page 28, on remarque que la vitesse optimale décroît lorsque la masse décroît alors que l'altitude demeure constante. En analysant les profils d'altitude et de vitesse le long de la trajectoire, on constate que la vitesse décroît lorsqu'on est à altitude constante. On voit aussi que lorsque la masse décroît, l'altitude augmente pour conserver une consommation optimale. Pour les trois valeurs du CI, la vitesse décroît jusqu'à ce que la masse de l'avion soit assez basse pour changer de niveau d'altitude. Dans ce cas, la vitesse croît car la vitesse optimale est corrélée positivement avec l'altitude. Ces résultats sont conformes avec ce qui a été expliqué au chapitre 4. On voit aussi que ces changements de vitesse et d'altitude sont affectés par la valeur du CI utilisée. Lorsque la valeur de CI est élevée, l'algorithme donne plus d'importance à la vitesse qu'à l'altitude. On remarque que pour CI_{\min} , CI_{moyen} et CI_{\max} , les niveaux d'altitude utilisés sont 7-8-9, 6-7-8 et 5-7-8 respectivement. Ces résultats sont compatibles avec ce qui a été expliqué aux chapitres précédents.

On a aussi examiné l'effet de la masse initiale sur la trajectoire. Nous avons utilisé trois valeurs de la masse initiale m notées m_{\min} , m_{moyen} et m_{\max} telles que $m_{\min} < m_{\text{moyen}} < m_{\max}$. Pour faire ces simulations, on a considéré un vol Montréal - Rio de Janeiro. Le point N_D est situé à l'aéroport Montréal-Trudeau et le point N_F est situé à l'aéroport International Rio de Janeiro - Antonio Carlos Jobim. Le choix de ce trajet permet de voir le comportement de la grille pour un vol nord - sud. On a utilisé des conditions météorologique ISA avec un vent nul et la même valeur du CI pour les trois valeurs de masses initiales choisies.

Pour voir le comportement des profils d'altitude dans les trois cas, on a représenté l'altitude en fonction de la distance parcourue pour les masses initiales m_{\min} , m_{moyen} et m_{\max} aux figures 7.15, 7.16 et 7.17 respectivement. On constate que plus la masse de l'avion est grande, plus les niveaux d'altitude du vol sont bas, ce qui est aussi conforme avec ce qui a été présenté au chapitre 4. Lorsque la masse de l'avion est plus grande, la force de portance de l'avion doit être plus élevée. Puisque la traînée de l'avion est une fonction croissante de la force de portance, la traînée devient aussi grande. Le comportement de l'algorithme est donc compatible avec ce qui a été présenté précédemment. Les profils de vitesse ne sont pas présentés ici car leur comportement est semblable à celui du premier exemple. Ces résultats montrent que l'algorithme respecte les conditions d'optimalité souhaitées pour les changements d'altitude et de vitesse dans les différents cas simulés.

La dernière simulation qu'on a faite a pour objectif d'examiner le comportement de la trajectoire face aux vents. On a considéré un vol Montréal - Paris. On a utilisé des conditions météorologiques ISA et une vitesse de vent nulle sur toute la trajectoire. On a représenté la

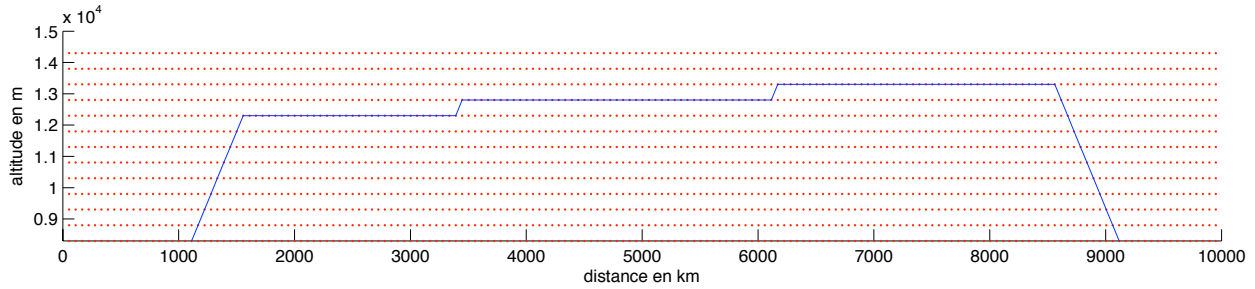


Figure 7.15 Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Rio de Janeiro avec m_{\min} .

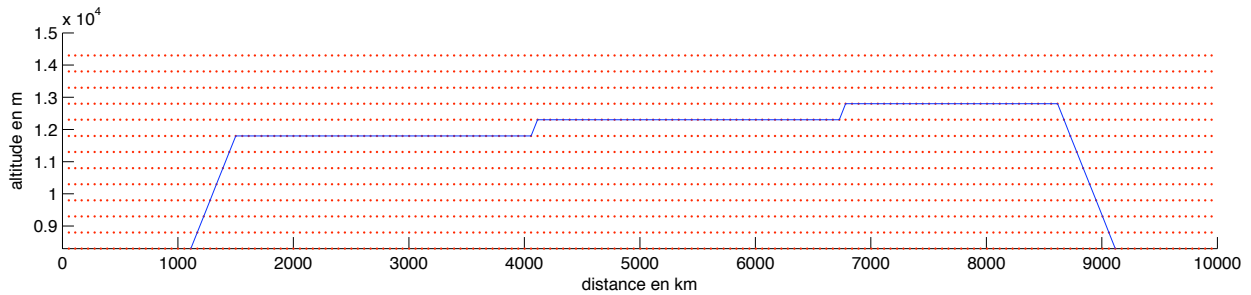


Figure 7.16 Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Rio de Janeiro avec m_{moyen} .

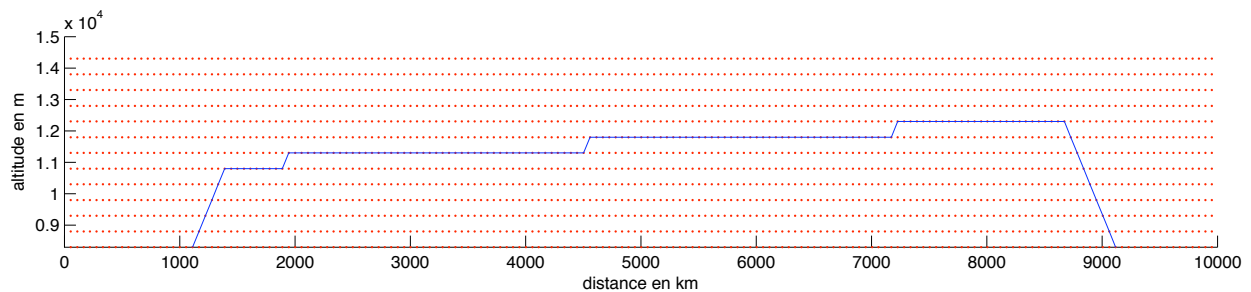


Figure 7.17 Profil d'altitude de la trajectoire pour un vol Montréal - Rio de Janeiro avec m_{\max} .

trajectoire obtenue à la figure 7.18. On constate que la projection la trajectoire forme une droite. On a utilisé ensuite le même vol, mais en utilisant des régions avec un vent favorable et d'autres avec un vent non favorable. On a illustré la trajectoire obtenue à la figure 7.19. On a représenté en vert les points avec un vent favorable et en jaune les points ayant un vent défavorable. On constate que la moitié de la trajectoire est dans la zone avec un vent

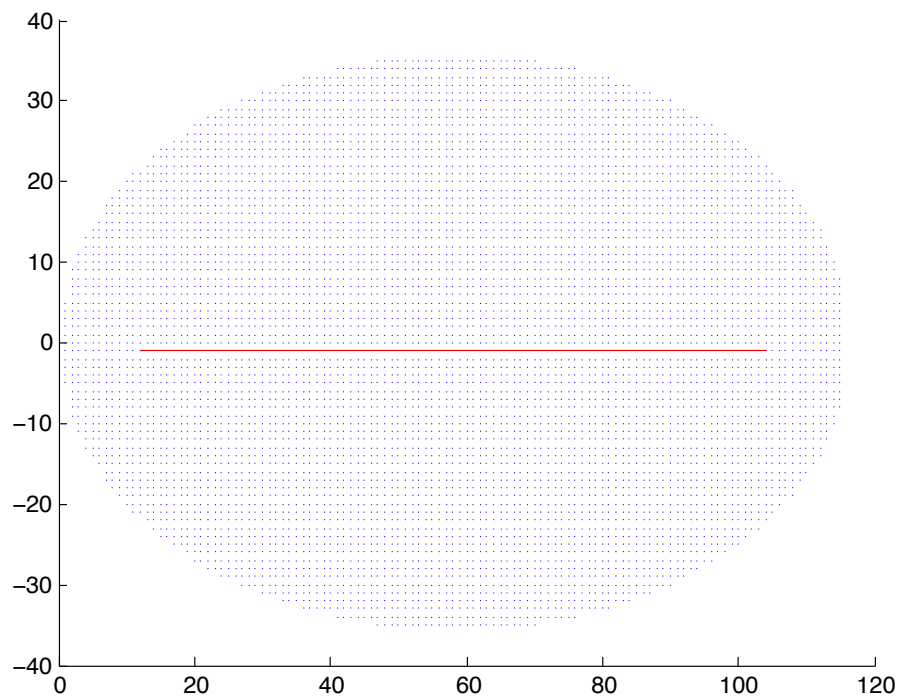


Figure 7.18 Profil horizontal de la trajectoire avec vitesse de vent nulle.

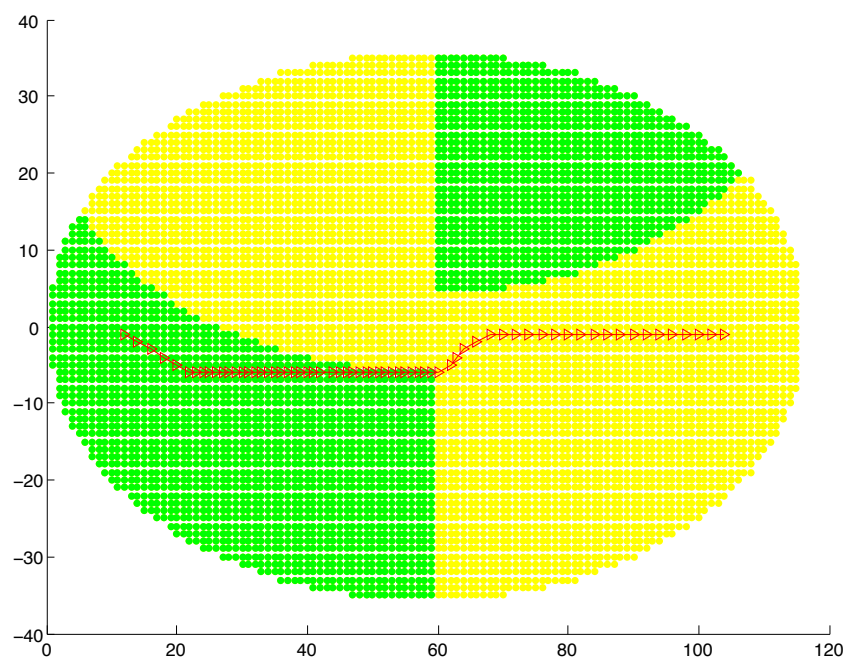


Figure 7.19 Profil horizontal de la trajectoire avec vitesse de vent non nulle.

favorable située à gauche. Pour la zone située à droite de la figure, il n'est pas profitable de s'éloigner du centre de la grille pour aller à la zone ayant un vent favorable. Dans cette région, voler contre le vent était moins coûteux que d'allonger la trajectoire pour voler dans la région avec un vent favorable.

On peut conclure que l'algorithme présenté se comporte d'une façon compatible avec les différentes notions qu'on a présentées. On a aussi évalué le temps d'exécution de l'algorithme. Pour un vol Montréal - Paris et en utilisant un ordinateur avec un processeur 3,06 GHz Intel Core 2 Duo et avec 8 Go de mémoire vive (RAM DDR3), le calcul de la trajectoire optimale se fait en moins d'une minute. La grille utilisée a un demi-grand axe qui contient 57 nœuds, un demi-petit axe qui contient 34 nœuds et on a utilisé dix niveaux d'altitude pour chaque nœud de la grille de calcul.

7.4 Ajustements de la discrétisation de la grille

La trajectoire déterminée doit passer par les nœuds de la grille. Cette trajectoire n'est optimale que dans la grille utilisée. Dans le cas où les vitesses des vents sont variables ou en présence de zones interdites au centre de la grille, on peut vouloir des sections de trajectoire avec un certain angle par rapport à l'axe principal de l'ellipse. Toutefois la grille et les arcs proposés offrent peu de choix d'angles et on obtient des trajectoires en zigzag. Cette discrétisation de la grille introduit une erreur qu'on devra étudier.

Pour améliorer les résultats, on pourrait :

1. faire une discrétisation plus fine dans les deux directions de la grille. Dans ce cas, on augmente le nombre des nœuds d'une façon quadratique, ce qui augmente le temps de calcul et on pourrait toujours avoir les mêmes problèmes de zigzag. Les longueurs des arcs seront plus petites, mais les angles restent les mêmes ainsi que la longueur de la trajectoire ;
2. ajouter plus de successeurs à chacun des nœuds. On ajoute dans ce cas plus de successeurs dans la direction du vol. Par exemple, pour un nœud (i, j, k) donné, on ajoute des nœuds aux niveaux $i - 3$ et $i - 4$ pour les positions $jj - 1$ et $jj + 1$. Dans ce cas, on augmente le nombre d'arcs d'une façon linéaire, ce qui augmente le temps de calcul. Cet ajout permettrait d'avoir plus de choix pour ce qui est des angles de virage, ce qui réduit l'amplitude des zigzags et la longueur de la trajectoire. Ces arcs seraient plus longs et pourraient donner des erreurs de calcul (par exemple des erreurs dans le calcul de la vitesse optimale) ;
3. faire une discrétisation plus fine dans les arcs de cercle A_i et garder la même discrétisation entre ces arcs de cercle. Plus précisément, la distance angulaire qui sépare

deux points de référence successifs $P_{i,j}$ et $P_{i,j+1}$ pourrait par exemple être d'un quart de degré et celle qui sépare les points de référence P_i et P_{i+1} reste d'un demi-degré. Dans ce cas, on obtient un quadrillage de forme rectangulaire et le choix des angles qui étaient compris entre -60° et 60° sera ramené entre -30° et 30° . Dans ce cas, la taille de la grille augmente d'une façon linéaire et on aura des angles de virage plus petits, ce qui pourrait réduire ou même éliminer l'effet de la grille (les zigzags) en gardant la même précision de calcul. En rapprochant les points $P_{i,j}$ et $P_{i,j+1}$, on peut réduire l'erreur autant que l'on veut ;

4. utiliser la méthode de propagation d'un front d'onde. Dans ce cas, il faut faire des développements théoriques, car le problème qu'on résout est plus compliqué que celui de Girardet (2014), i.e. la masse, la vitesse et l'altitude sont variables sur les arcs. On pourrait essayer d'utiliser cette méthode en variant une variable à la fois. On pourrait par la suite utiliser cette première approximation et faire varier une deuxième variable.

CHAPITRE 8

CONCLUSION

L'objectif principal de cette thèse est de déterminer une trajectoire optimale pour un vol d'avion devant aller d'un aéroport de départ à un aéroport d'arrivée. On a présenté les méthodes de calcul utilisées pour déterminer cette trajectoire.

8.1 Synthèse des travaux

Dans le cadre de cette thèse, on a développé une méthode pour le calcul du coût d'un arc pour les différentes phases du vol et on a construit une grille dans laquelle on détermine le plus court chemin pour déterminer la trajectoire optimale.

Le premier problème à résoudre consiste à calculer le coût d'un arc. On a présenté au chapitre 4 la modélisation aérodynamique utilisée et les différentes équations différentielles à résoudre pour calculer ce coût. Au chapitre 5, on a présenté la méthode de calcul du coût d'un arc en phase de croisière. On a expliqué comment on considère les conditions météorologiques ainsi que le coût du temps dans le calcul. La méthode développée respecte les règles de navigation et les procédures utilisées par les pilotes. Au chapitre 6, on a présenté la méthode de calcul du coût d'un arc en phase de montée initiale et de descente finale. On a montré que le calcul du coût des différents types d'arcs se fait d'une façon optimale. La détermination de la trajectoire optimale commence par la détermination des coûts optimaux pour chaque arc.

Pour la vérification de nos calculs, on a d'abord comparé nos résultats avec les valeurs tabulées données par les tables BADA d'Eurocontrol. On a testé le calcul de la consommation instantanée du carburant pour les trois phases du vol ainsi que les taux instantanés de montée et de descente. Ces comparaisons ont montré que les résultats de notre calcul sont corrects. Dans le cadre de ce projet, on a implémenté deux méthodes différentes de discrétisation numériques pour résoudre le même système d'équations différentielles. Cette double implémentation nous a permis de vérifier les résultats. On a présenté les résultats des deux méthodes et on a constaté que les deux méthodes donnent les mêmes résultats. Cette comparaison nous a permis de détecter certaines erreurs d'implémentation et de les corriger. On a aussi vérifié la convergence numérique de notre méthode de calcul. On a obtenu des résultats compatibles avec l'ordre de convergence prédit par la théorie. On a présenté les algorithmes développés pour le calcul du coût des arcs ainsi que les pseudo-codes utilisés.

Au chapitre 7, on a présenté la construction de la grille de calcul ainsi que la méthode de détermination du plus court chemin utilisée. On a simulé quelques calculs de plans de vol. On a trouvé que les trajectoires obtenues sont compatibles avec les lois de l’aéronautique et respectent les règles de pilotage.

8.2 Limitations de la solution proposée

Pour calculer le coût d’un arc, on a utilisé la famille 3 de la modélisation BADA d’Eurocontrol. On a constaté que cette modélisation ne tient pas compte de la traînée d’onde en régime transsonique. En fait, lorsque la vitesse de l’avion s’approche de la vitesse du son, on observe une augmentation de la traînée supérieure à celle donnée par la traînée polaire. Cette augmentation de la traînée n’a pas été traitée dans la modélisation qu’on a utilisée. Ceci cause un problème à grande vitesse (proche de la vitesse du son) et ça pourrait affecter la détermination de la vitesse optimale, surtout dans le cas où la valeur du CI est élevée. On a essayé d’utiliser la loi de Lock (1957) qui a été développée dans les années cinquante et qui se base sur le calcul d’un nombre de Mach critique au-dessus duquel la forme de la traînée change. Le manque de données pertinentes et de temps nous ont empêché de terminer cette étude.

Pour la détermination du plus court chemin, on a utilisé une grille qui est une discrétisation de l’espace. Cette discrétisation peut causer des problèmes de trajectoires en zigzag surtout en présence de zone interdites ou en présence de vents variables. On peut toujours explorer plus de voisins pour chaque nœud pour améliorer les résultats. Cet ajout est coûteux en temps de calcul et il y a toujours le risque que ces trajectoires en zigzag se soient pas toutes éliminées.

8.3 Améliorations futures

Eurocontrol a développé la nouvelle famille BADA 4. Cette nouvelle version tient compte de la traînée d’onde et pourrait améliorer les résultats en ayant des calculs plus précis. On fera une mise à jour de notre algorithme en tenant compte des améliorations apportées dès qu’on aura accès à cette version.

On devrait aussi étudier le choix des successeurs de chaque nœud en phase de croisière. On pourrait ajouter plus de voisins dans la direction du vol ou dans la direction perpendiculaire pour réduire l’effet de la grille (les zigzags). On pourrait aussi essayer une discrétisation plus fine de la grille pour lisser les trajectoires obtenues. On devrait aussi regarder si la méthode de propagation d’un front d’onde pourrait être adaptée à notre méthode pour construire une trajectoire optimale plus lisse.

RÉFÉRENCES

- ADAMS, D. R. et MCKENZIE, R. E. (1989). System and method for optimizing aircraft flight path. *US PATENT*, 07044059.
- AGAM, L. et AGAM, D. (2009). System for producing a flight plan. *US PATENT*, 12331454.
- BADA TEAM (2000a).
https://www.eurocontrol.int/sites/default/files/field_tabs/content/documents/sesar/bada-b763-ptf.pdf.
- BADA TEAM (2000b).
http://www.eurocontrol.int/sites/default/files/field_tabs/content/documents/sesar/bada-b763-opf.pdf.
- BAOXING TANG, R. et MUKHERJEE, A. (2000). System and method for generating optimal flight plans for airline operations control. *US PATENT*, 09324687.
- BELLMAN, R. (1958). On a Routing Problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16, 87–90.
- BLAKE, W. (2009). Jet transport performance methods. Rapport technique, The performance training group flight operations engineering Boeing Commercial Airplanes.
- BOEING (2005). 767 airplane characteristics for airplane planning. Rapport technique D6-58328, Boeing Commercial Airplanes, <http://www.boeing.com/assets/pdf/commercial/airports/acaps/767.pdf>.
- BOIFFIER, J.-L. (2000). *Notes de cours de Dynamique du Vol*. SupAéro Toulouse - Département Aéronefs, version 5 édition.
- BOROUJERDI, A. et UHLMANN, J. (1998). An efficient algorithm for computing least cost paths with turn constraints. *Information Processing Letters*, 67, 317 – 321.
- BOROUJERDI, A. et UHLMANN, J. K. (2002). Efficient computation of least cost paths with hard constraints. *US PATENT*, 09372161.
- CAC : LE CONSEIL DES AÉROPORTS DU CANADA (2014). L'impact économique de l'industrie canadienne du transport aérien.
- CHAKRAVARTY, A. J. M. (1995). Time-responsive flight optimization system. *US PATENT*, 07512618.
- CONSIGLIO, M. et ALLEN, B. D. (2009). Estimation of separation buffers for wind-prediction error in an airborne separation assistance system. *Eighth USA/Europe Air Traffic*

Management Research and Development Seminar (ATM2009). NASA Langley Research Center Crew Systems and Aviation Operations Branch Hampton, Virginia.

COOK, A., TANNER, G., WILLIAMS, V. et MEISE, G. (2007). Dynamic cost indexing. F. EUROCONTROL Experimental Center, Brétigny sur Orge, éditeur, *6th EUROCONTROL Innovative Research Workshops & Exhibition, 4-6 December 2007*.

FLIGHT OPERATIONS SUPPORT & LINE ASSISTANCE (1998). Getting to grips with the cost index. Rapport technique, AIRBUS.

FLIGHT OPERATIONS SUPPORT & LINE ASSISTANCE (2002). Getting to grips with aircraft performance. Rapport technique, AIRBUS.

IATA ECONOMICS (2010). Airline fuel and labour cost share. Briefing, IATA.

TRANSPORT STUDIES GROUP, UNIVERSITY OF WESTMINSTER, LONDON (2007). Dynamic cost indexing. Rapport technique, Innovative Cooperative Actions of Research & Development in EUROCONTROL Programme CARE INO III.

ENDO, Y., AMAYA, S. et SUMIZAWA, A. (2008). Travel time calculating method and traffic information display method for a navigation device. *US PATENT*, 10811966.

FILIPPONE, A. (2008). Comprehensive analysis of transport aircraft flight performance. *Progress in Aerospace Sciences*, 44, 192 – 236.

GILL, V. et RAYNOR, R. N. (2013). Une nouvelle politique canadienne du transport aérien : au service de l'expansion économique. Rapport technique, Le Conference Board du Canada.

GIRARDET, B. (2014). *Trafic Aérien : Détermination optimale et globale des trajectoires d'avions en présence de vent*. Thèse de doctorat, EDAA (École Doctorale Aéronautique Astronautique), Toulouse France.

GREEN, S., GRACE, M. et WILLIAMS, D. (2000). Flight test results : CTAS and FMS cruise/descent trajectory prediction accuracy. *3rd USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar Napoli, Italy*.

HTTP ://WWW.GRIB.US (url). [http ://www.grib.us](http://www.grib.us).

IATA (2007). Fuel efficiency gap analysis final report. Rapport technique, Air France (Mainline), Paris, France.

KERMODE, A. C. (2006). *Mechanics Of Flight*. Pearson Education Limited, 11th édition.

LOCK, R. C. (1957). A note on the application of the supersonic area rule to the determination of the wave drag of rectangular wings. *Journal of Fluid Mechanics*, 2, 575–582.

- LÜDTKE, A., OSTERLOH, J.-P., MIOCH, T., RISTER, F. et LOOIJJE, R. (2010). Cognitive modelling of pilot errors and error recovery in flight management tasks. *Human Error, Safety and Systems Development*, 5962, 54–67.
- MYERS, W. L. (2000). System for determination of optimal travel path in a multidimensional space. *US PATENT*, 08938246.
- NUIC, A. (2009). *User manual for the base of aircraft data (BADA)*. EUROCONTROL EXPERIMENTAL CENTRE, Centre de Bois des Bordes B.P.15 F - 91222 Brétigny-sur-Orge CEDEX FRANCE Telephone : +33 (0)1 69 88 75 00, 3.7 édition.
- NUIC, A., POINSOT, C., IAGARU, M.-G., GALLO, E., NAVARRO, F. A. et QUEREJETA, C. (2005). Advanced aircraft performance modelling for ATM : Enhancements to the BADA model. *24th Digital Avionics System Conference*.
- SCHULTZ, R. L. et SHANER, D. A. (2001). Multi-dimensional route optimizer. *US PATENT*, 09223846.
- SCHULTZ, R. L., SHANER, D. A. et PRATT, S. G. (2003). Four-dimensional route planner. *US PATENT*, 09957416.
- SCHWARTZ, B., BENJAMIN, S., GREEN, S. et JARDIN, M. (2000). Accuracy of RUC-1 and RUC-2 wind and aircraft trajectory forecasts by comparison with acars observations. *Journal of the American Meteorological Society*, 15, 313–326.
- SPEYER, J.-J. (2006). Airsavings : A perspective to get with dignified cost index values. *OLM FBW 2006 - Toulouse - FRANCE*. AIRBUS.
- TOUNSI, I. (2000). Transport aérien : un ciel inégal. *Alternatives Economiques*, 186.
- VERLUT, G. et LOHMILLER, W. (2010). Computation-time-optimized route planning for aircraft. *US PATENT*, 12575938.
- YANG, J., WANG, Z., WANG, J. et HULL, R. A. (2009). Real-time optimized trajectory planning for a fixed-wing vehicle flying in a dynamic environment. *Journal of aerospace engineering*, 22, 331–341.